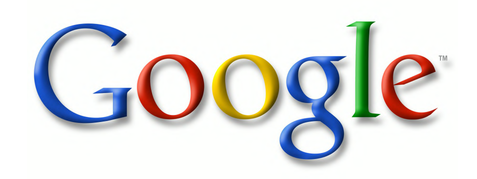
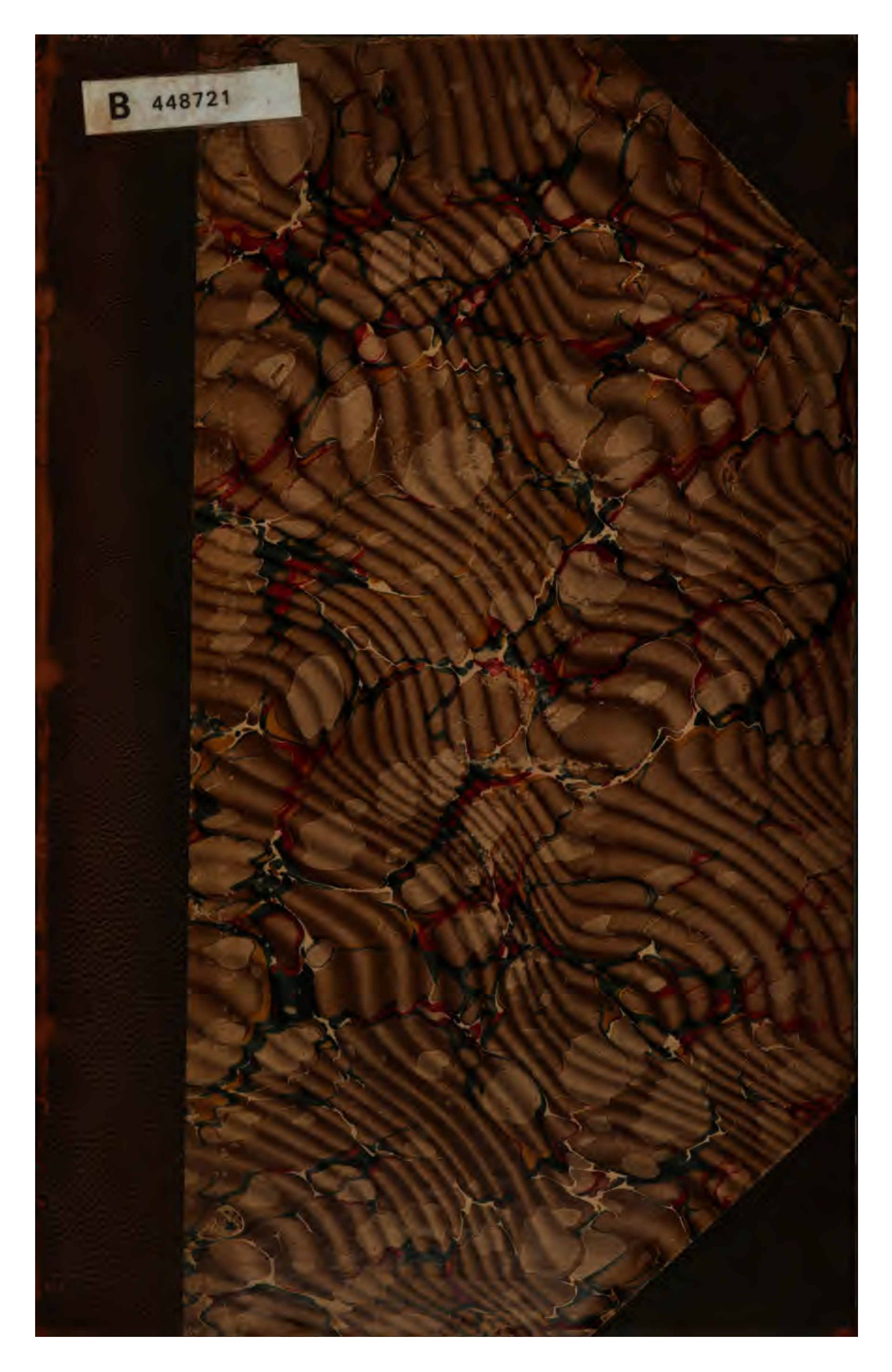

Google


B 448721


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET



COURS

DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE

COURS

DE

MÉCANIQUE

ANALYTIQUE

PAR

J. GRAINDORGE

DOCTEUR SPÉCIAL EN SCIENCES PHYSICO-MATHÉMATIQUES
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE

TOME II

DYNAMIQUE

MONS
HECTOR MANCEAUX, ÉDITEUR

1889

Alex. Ziwet
gt.
8-31-1922

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

DYNAMIQUE.

LIVRE PREMIER.

DYNAMIQUE DU POINT.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

LIVRE II.

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

ERRATA.

Page 25, ligne 15, *lisez* : $a = \frac{a'}{\sqrt{1-k^2a'^2}}$.

» 33, » 16, *au lieu de* : F *lisez* : $\mathfrak{F}$.

» 121, » 3 en bas, *au lieu de* : Mais, *lisez* : En effet.

» 146, » 3 » » Am, » Nm.

» 147, » 2, *au lieu de* : AB, *lisez* : NB.

» 161, » 9 en bas, *au lieu de* : z, *lisez* : z_0.

» 169, » dernière » $\frac{\alpha}{\beta}$, » $\frac{\beta}{\alpha}$.

» 212, » 18, *au lieu de* : z, *lisez* : Z.

» 258, » 9 en bas, *lisez* : de l'équation de Lagrange.

» 300, » 5, *lisez* : les composantes de la rotation de ce système.

» 305, » 10, *au lieu de* : $\omega^2 r$, *lisez* : ω^2R.

» 331, » 2 en bas, *au lieu de* : (n° **214**), *lisez* : (n° **229**).

» 352, » 6, *au lieu de* : $-$M(k^2+a^2), *lisez* : $=$M(k^2+a^2).

» 359, » 3, *au lieu de* : Ox, *lisez* : Ox_1.

COURS
DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE.

LIVRE I.

DYNAMIQUE DU POINT.

CHAPITRE PREMIER.

Mouvement rectiligne d'un point libre.

1. Le problème que l'on se propose de résoudre dans la Dynamique du point matériel consiste à déterminer le mouvement d'un point soumis à l'action d'une ou de plusieurs forces.

Nous savons que, si plusieurs forces agissent simultanément sur un point matériel libre, elles peuvent être remplacées par leur résultante, et, par conséquent, le problème se réduit à l'étude du mouvement d'un point matériel sous l'action d'une force unique.

2. Proposons-nous d'abord d'étudier le *mouvement rectiligne d'un point libre*. Il est facile de reconnaître que, si un point matériel, partant du repos, est soumis à l'action d'une force de direction constante, il se mouvra suivant une ligne droite. Il en sera de même, si le point matériel a reçu une vitesse initiale dont la direction coïncide avec celle de la force qui lui est appliquée. Il suffira, pour s'en assurer, de raisonner comme nous l'avons fait (I, n° **189**) pour le cas d'une force constante en grandeur et direction.

Nous savons que si m est la masse du point matériel, φ l'accélération du mouvement de ce point à un instant quelconque, et P la valeur de la force à cet instant, nous aurons la relation (I, n° **198**) :

$$P = m\varphi.$$

Si l'on désigne par t le temps compté à partir d'un instant quelconque pris pour origine, x la distance du point mobile à un point fixe de sa trajectoire rectiligne, à la fin du temps t, et v la vitesse du point à cet instant, on a :

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Par conséquent, on a :

$$P = m\frac{dv}{dt}, \quad \text{ou bien :} \quad P = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

C'est l'*équation différentielle du mouvement rectiligne*.

On obtiendra l'équation finie du mouvement en intégrant l'équation précédente. Les *constantes arbitraires* introduites par l'intégration se déterminent

d'après les circonstances initiales, c'est-à-dire d'après la distance du mobile au point fixe à l'origine du temps, et d'après sa vitesse initiale.

3. En général, la force P varie avec le temps t, l'espace parcouru x, et la vitesse v du mobile. Lorsque P sera donnée en fonction des trois variables t, x, v, ou de deux d'entre elles, le problème de *l'intégration de l'équation différentielle du mouvement dépendra de la forme de la fonction*. Il n'y a pas de méthode générale à donner à cet égard. Mais, lorsque la force P est donnée en fonction d'une seule des trois variables, le problème se ramène facilement à une quadrature.

4. Nous allons étudier séparément les trois cas :

1[er] Cas. — On donne : $P = f(t)$.

L'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(t).$$

Multipliant les deux membres par dt, et intégrant, il vient :

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(t)\, dt,$$

v_0 étant la vitesse du mobile pour $t = 0$.

Désignant le second membre par $\varphi(t)$, et intégrant de nouveau, on a :

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\, dt,$$

x_0 étant la valeur de x pour $t = 0$.

2° Cas. — On donne : $P = f(x)$.
L'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Multipliant les deux membres par $2dx$, et intégrant, il vient :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v_0{}^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx\,;$$

de cette équation on tire :

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi(x),$$

d'où, en résolvant par rapport à t :

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x)},$$

et, en intégrant :

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

3° Cas. — On donne : $P = f(v)$.
L'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(v),$$

ou bien :

$$m\frac{dv}{dt} = f(v);$$

d'où l'on tire :

$$dt = m\frac{dv}{f(v)},$$

et, en intégrant,

$$t = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}.$$

Résolvant cette équation par rapport à v, on a :

$$v = \varphi(t),$$

ou bien :

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(t),$$

d'où :

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi(t)\, dt.$$

Remarque. — On peut encore, dans ce cas, opérer de la manière suivante :

De la formule :

$$v = \frac{dx}{dt},$$

on tire :

$$dx = vdt = m\frac{vdv}{f(v)},$$

d'où, en intégrant,

$$x = x_0 + m\int_{v_0}^{v}\frac{vdv}{f(v)}.$$

En éliminant v entre cette équation et la formule :

$$t = m\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)},$$

on obtient la relation entre x et t.

Exemples de mouvements rectilignes.

5. Problème I. — *Un point matériel pesant tombe verticalement dans le vide. Trouver les lois du mouvement.*

Soient g l'accélération due à la pesanteur, m la masse du point matériel, x l'espace parcouru à la fin du temps t, l'axe des x étant vertical et dirigé dans le sens de la pesanteur (fig. 1). L'équation du mouvement est :

Fig. 1.

o

m

x

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg,$$

ou bien :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g.$$

On en tire :

$$v = \frac{dx}{dt} = gt,$$

$$x = \tfrac{1}{2} gt^2,$$

en supposant que l'on compte les espaces et le temps à partir du point O où la vitesse est nulle.

En éliminant t entre ces deux équations, on a :

$$v = \sqrt{2gx},$$

ou bien :

$$x = \frac{v^2}{2g}.$$

L'expression $\sqrt{2gx}$ est *la vitesse due à la hauteur x.*

6. PROBLÈME II. — *Un point matériel pesant est lancé verticalement de bas en haut dans le vide. Trouver les lois du mouvement.*

Dans le cas actuel, la force qui est la pesanteur agit en sens inverse du mouvement. Si l'on désigne par x l'espace parcouru à la fin du temps t, l'équation du mouvement est :

Fig. 2.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg, \quad \text{ou bien :} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

en comptant les abscisses positives de bas en haut (fig. 2).

On en tire :

$$v = \frac{dx}{dt} = a - gt,$$

en désignant par a la vitesse initiale.

Par suite,

$$x = C + at - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Si l'on compte les espaces à partir du point O, où le mobile se trouve à l'origine du temps, on a $x = 0$, pour $t = 0$; par conséquent, $C = 0$, et il vient :

$$x = at - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Désignons par θ le temps au bout duquel le mobile cesse de monter, et par $OA = h$ la hauteur à laquelle il s'élève, nous aurons :

$$0 = a - g\theta,$$

$$h = a\theta - \tfrac{1}{2}g\theta^2.$$

On en tire :

$$\theta = \frac{a}{g}, \quad h = \frac{a^2}{2g}.$$

Cette quantité $\frac{a^2}{2g}$ est la hauteur due à la vitesse a.

Arrivé à cette hauteur, le mobile commence à descendre, et *revenu au point de départ, sa vitesse reprend sa valeur initiale* a.

En effet, si, dans la formule du mouvement descendant (n° **5**) :

$$x = \frac{v^2}{2g},$$

on fait $x = h = \frac{a^2}{2g}$, il vient : $v = a$.

Il est d'ailleurs facile de s'assurer qu'*en un point quelconque de la verticale, le mobile a la même vitesse en montant et en descendant.*

En effet, soit v_1 la vitesse du mobile en un point m_1 pendant le mouvement ascensionnel (fig. 2), nous aurons, en posant $0m_1 = x_1$, et en désignant par t_1 le temps correspondant :

$$v_1 = a - gt_1,$$

$$x_1 = at_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2.$$

Si v' est la vitesse du mobile en ce même point m_1 pendant la chute, nous aurons, en observant que $Am_1 = h - x_1$,

$$v'^2 = 2g\,(h - x_1) = a^2 - 2gx_1.$$

Il s'agit de démontrer que l'on a : $v_1 = v'$. Or, de la formule :

$$v_1 = a - gt_1,$$

on tire :

$$t_1 = \frac{a - v_1}{g};$$

d'où, en substituant dans la formule :

$$x_1 = at_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2,$$

on trouve :

$$x_1 = \frac{a^2 - v_1^2}{2g},$$

ou bien :

$$v_1^2 = a^2 - 2gx_1,$$

et, par suite,

$$v_1 = v'.$$

7. Problème III. — *Un corps pesant se meut sur un plan incliné. Trouver les lois du mouvement de ce corps.*

Soit mg le poids du corps appliqué à son centre de gravité G (fig. 3) ; la seule force qui tende à faire descendre le corps est la composante de son poids parallèle au plan incliné.

Fig. 3.

Or, si nous désignons par α l'angle ABC du plan avec l'horizon, cette composante sera égale à $mg \sin \alpha$, et l'équation du mouvement sera :

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha,$$

ou bien :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \alpha. \qquad (1)$$

On en tire :

$$v = g \sin \alpha \,.\, t, \qquad (2)$$

ou bien :

$$\frac{ds}{dt} = gt \sin \alpha,$$

d'où :

$$s = \tfrac{1}{2} gt^2 \sin \alpha. \qquad (3)$$

En éliminant t entre les équations (2) et (3) il vient :

$$v^2 = 2gs \,.\, \sin \alpha. \qquad (4)$$

L'équation (1) nous apprend que *le mouvement du corps le long du plan incliné est le même que celui qui aurait lieu suivant la verticale, si l'intensité de la pesanteur, au lieu d'être égale à g, était égale à $g \sin \alpha$.*

Si nous désignons par V la vitesse au bas du plan incliné, par l la longueur de ce plan et par h sa hauteur, nous aurons, en vertu de l'équation (4) :

$$V^2 = 2gl \sin \alpha = 2gh.$$

Donc, *la vitesse acquise par le mobile en arrivant au bas du plan incliné est la même que celle qu'il aurait acquise en tombant verticalement de la hauteur* AC $= h$.

Cherchons encore *la longueur que le mobile doit parcourir sur le plan incliné, pour que la durée de son mouvement soit égale à celle qu'il emploierait à descendre de la hauteur h.*

Soient x cette longueur, et t le temps employé par le mobile pour parcourir cette longueur. La formule (3) nous donne :

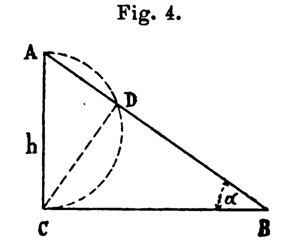


Fig. 4.

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha.$$

D'autre part, si t est le temps employé à parcourir la hauteur $AC = h$, nous aurons (n° **5**) :

$$h = \frac{1}{2} g t^2.$$

En égalant les deux valeurs de t, il vient :

$$x = h \sin \alpha.$$

Or, si du point C on abaisse une perpendiculaire sur AB (fig. 4), on a :

$$AD = h \sin \alpha.$$

Donc, *la longueur cherchée s'obtient en abaissant du point* C *une perpendiculaire sur le plan incliné.*

REMARQUE. — La position du point D change évidemment avec l'inclinaison du plan : le lieu du point D sera la demi-circonférence décrite sur AC comme diamètre. On en conclut la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. — *Sous l'action de la pesanteur un mobile emploie le même temps pour décrire un diamètre vertical* AC, *que pour parcourir les différentes cordes qui passent par l'extrémité supérieure de ce diamètre.*

8. PROBLÈME IV. — *Trouver le mouvement d'un point matériel pesant tombant dans le vide à partir d'un point* O *situé à une assez grande distance de la surface de la terre.*

Dans ce cas, l'intensité de la pesanteur ne peut pas être considérée comme constante : elle est en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre.

Fig. 5.

O

m

B

A

x

Soient A le centre de la terre (fig. 5), B le point où la droite OA rencontre la surface de la terre.

Lorsque le point matériel est en B son poids est égal à mg.

En désignant par x la distance Om, par a la distance OA, par r le rayon de la terre, le poids P' du point matériel en m sera donné par la formule :

$$\frac{P'}{mg} = \frac{r^2}{(a-x)^2},$$

d'où :

$$P' = mg\frac{r^2}{(a-x)^2}.$$

L'équation différentielle du mouvement est donc, en supprimant le facteur m commun aux deux membres :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\frac{r^2}{(a-x)^2}. \tag{1}$$

Multipliant les deux membres par $2dx$, et intégrant, il vient :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gr^2}{a-x} + C.$$

On détermine la constante C, en observant qu'au point O, c'est-à-dire pour $x = 0$, la vitesse est nulle ; on a donc :

$$C = -\frac{2gr^2}{a};$$

par suite,

$$v^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{x}{a-x}. \qquad (2)$$

Cette formule nous apprend que *la vitesse augmente avec x*, ce que l'on pouvait prévoir.

Si l'on fait $x = OB = a - r = h$, il vient :

$$V = \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}};$$

comme $r < a$, on en conclut que *la vitesse du mobile en arrivant à la surface de la terre est moindre que la vitesse qu'il aurait en tombant de la même hauteur h, si la pesanteur était partout la même qu'à la surface.*

Pour $x = a$, on a $v = \infty$; donc, *si toute la masse de la terre était concentrée à son centre, la vitesse acquise par le mobile en arrivant au centre serait infinie.*

Si dans la formule (2) on remplace v par sa valeur $\frac{dx}{dt}$, il vient :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2gr^2}{a} \cdot \frac{x}{a-x};$$

d'où l'on tire :

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \cdot \sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}} \cdot \frac{(a-x)\, dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Nous avons donné aux radicaux le même signe, parce que dx et dt sont de mêmes signes, x et t augmentant en même temps.

En intégrant, on a :

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^x \frac{(a-x)\, dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^x \frac{(\frac{1}{2}a-x)\, dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^x \frac{\frac{1}{2}a\, dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

par conséquent,

$$t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \operatorname{arc\,cos} \frac{a-2x}{a}.$$

9. PROBLÈME V. — *Trouver le mouvement rectiligne d'un point matériel attiré par un centre fixe* O, *en raison directe de la distance.*

Soit un point matériel placé d'abord au point A, où sa vitesse est nulle (fig. 6), et attiré par un centre O, et soit m la position du mobile à la fin du temps t. Comme la force attractive a pour effet de diminuer l'abscisse du point m, l'équation du mouvement sera :

Fig. 6.

A' O m A x

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x,$$

n^2 étant l'attraction exercée sur l'unité de masse du point mobile à l'unité de distance.

Multipliant les deux membres par $2dx$, et intégrant, il vient :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \mathrm{C} - n^2x^2.$$

Pour déterminer la constante, observons que pour $x = \mathrm{OA} = a$, on a $v = 0$; d'où $\mathrm{C} = n^2a^2$. On a donc :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = n^2 (a^2 - x^2).$$

Extrayons la racine carrée des deux membres, en observant que de A en O, x diminue quand t augmente, et, par conséquent, que dx et dt sont de signes contraires ; nous aurons :

$$\frac{dx}{dt} = - n \sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où :

$$ndt = - \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

on en tire, en intégrant :

$$nt = const. + \text{arc} \cos \frac{x}{a}.$$

Or, pour $t = 0$, on a $x = a$; donc la constante est nulle, et il vient :

$$nt = \text{arc} \cos \frac{x}{a},$$

d'où :

$$x = a \cos nt,$$

et, par conséquent,

$$v = -na \sin nt.$$

Discussion. — Lorsque le mobile est en O, on a : $x = 0$, d'où :

$$nt = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou bien} \quad t = \frac{\pi}{2n},$$

et, par suite,

$$v = -na.$$

Ainsi, depuis $t = 0$ jusque $t = \frac{\pi}{2n}$, x est positif, et décroît jusque zéro, v est négatif et croît numériquement jusque na. Au point O, la vitesse est maximum, et dirigée dans le sens AO : le mobile dépassera donc lè point O, et continuera à se mouvoir en vertu de la vitesse acquise.

Poùr déterminer le point A' où le mobile s'arrête, faisons $v = 0$, et nous aurons :

$$nt = \pi, \quad \text{d'où} \quad t = \frac{\pi}{n},$$

et, par suite,

$$x = -a.$$

On a donc OA' = OA.

Le mobile arrivé en A' a une vitesse nulle ; il est donc placé, par rapport au point O, dans les mêmes conditions qu'au point A : par conséquent, il sera attiré vers O avec une vitesse croissante de A' en O, où sa vitesse sera ***na***. Il continuera sa route en vertu de la vitesse acquise jusqu'au point A, pour revenir en O, et ainsi de suite.

Le mobile fera donc une infinité d'oscillations égales entre elles, et de même durée de A en A', et de A' en A.

10. Problème VI. — *Trouver le mouvement d'un point matériel pesant, qui tombe suivant la verticale dans un milieu résistant, par exemple dans l'air.*

Les forces qui agissent sur le mobile sont le poids du corps égal à mg, et la résistance de l'air R, qui est dirigée en sens contraire du mouvement. La force motrice au point m (fig. 1) est donc mg — R, et, par conséquent, l'équation du mouvement est, en désignant par x l'espace parcouru par le mobile à la fin du temps t :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \mathrm{R}.$$

Or, on reconnaît par l'expérience que la résistance de l'air est une fonction de la vitesse : lorsque le mouvement n'est ni très lent, ni très rapide, cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. On a donc, en désignant par A une constante :

$$\mathrm{R} = \mathrm{A}v^2,$$

et l'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - \mathrm{A}v^2,$$

ou bien :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - Av^2.$$

Pour la facilité des calculs, nous poserons $A = mgk$, et l'équation pourra être mise sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = g - gk^2v^2 = g(1 - k^2v^2). \qquad (1)$$

On en tire :

$$dt = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{1 - k^2v^2}, \qquad (2)$$

d'où, en intégrant,

$$t = \frac{1}{2gk}\, l\, \frac{1 + kv}{1 - kv} + const.$$

Or, pour $t = 0$, on a $v = 0$; par suite, la constante est nulle, et il vient :

$$t = \frac{1}{2gk}\, l\, \frac{1 + kv}{1 - kv}. \qquad (3)$$

Cette équation nous donne :

$$e^{2gkt} = \frac{1 + kv}{1 - kv},$$

d'où :

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{gkt} - e^{-gkt}}{e^{gkt} + e^{-gkt}}. \qquad (4)$$

C'est la relation entre la vitesse et le temps.

Pour obtenir l'espace en fonction du temps, remplaçons v par sa valeur $\frac{dx}{dt}$ dans l'équation (4), et nous aurons :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{gkt} - e^{-gkt}}{e^{gkt} + e^{-gkt}},$$

d'où, en intégrant,

$$x = \frac{1}{gk^2} \, l \left(e^{gkt} + e^{-gkt}\right) + const.$$

Or, pour $t = 0$, on a $x = 0$; par suite,

$$const. = -\frac{1}{gk^2} \, l2,$$

et il vient :

$$x = \frac{1}{gk^2} \, l \frac{e^{gkt} + e^{-gkt}}{2}.$$

On peut encore trouver une relation entre l'espace et la vitesse.

En effet, si dans la formule :

$$dx = vdt,$$

on remplace dt par sa valeur (2), on a :

$$dx = \frac{1}{g} \frac{vdv}{1 - k^2v^2},$$

d'où :

$$x = -\frac{1}{2gk^2} \, l \, (1 - k^2v^2) + const.$$

Or, si l'on observe que pour $x = 0$, on a $v = 0$, la constante est nulle, et il vient :

$$x = \frac{1}{2gk^2}\, l\, \frac{1}{1 - k^2v^2}. \qquad (5)$$

REMARQUE. — L'équation (4) que l'on peut écrire :

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{1 - e^{-2gkt}}{1 + e^{-2gkt}},$$

nous apprend qu'à mesure que t augmente, v converge vers la valeur constante $\frac{1}{k}$. Mais, on n'a $v = \frac{1}{k}$ que pour $t = \infty$; par conséquent, *le mouvement tend à devenir uniforme*, mais il ne l'est jamais rigoureusement.

11. PROBLÈME VII. — *Trouver le mouvement d'un point matériel pesant lancé verticalement de bas en haut dans un milieu résistant.*

Si nous comptons les abscisses positives dans le sens Ox (fig. 7), l'équation du mouvement est :

Fig. 7.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = - mg - R,$$

ou bien, en posant $R = mgk^2v^2$,

$$\frac{dv}{dt} = - g\,(1 + k^2v^2). \qquad (1)$$

On en tire :

$$dt = -\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{1 + k^2v^2}, \qquad (2)$$

d'où :

$$t = -\frac{1}{gk} \text{ arc tg } kv + const.$$

Or, si l'on désigne par a la vitesse initiale, on a : $v = a$, pour $t = 0$, et, par suite,

$$const. = \frac{1}{gk} \text{ arc tg } ka.$$

On a donc :

$$t = \frac{1}{gk} (\text{arc tg } ka - \text{arc tg } kv), \tag{3}$$

ou bien :

$$t = \frac{1}{gk} \text{ arc tg } \frac{ka - kv}{1 + k^2av}. \tag{4}$$

De cette formule on tire :

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{ka - \text{tg } gkt}{1 + ka \text{ tg } gkt}. \tag{5}$$

C'est l'expression de la vitesse en fonction du temps. On peut la mettre sous la forme suivante :

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{ka \cos gkt - \sin gkt}{\cos gkt + ka \sin gkt}.$$

Pour obtenir l'espace en fonction du temps, il suffit de remplacer v par sa valeur $\frac{dx}{dt}$, ce qui donne :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \cdot \frac{ka \cos gkt - \sin gkt}{\cos gkt + ka \sin gkt},$$

et, en intégrant,

$$x = \frac{1}{gk^2} l (\cos gkt + ka \sin gkt) + const.$$

Or, pour $t = 0$, on a $x = 0$; par suite, la constante est nulle, et il vient :

$$x = \frac{1}{gk^2} l (\cos gkt + ka \sin gkt). \qquad (6)$$

On peut aussi obtenir une relation entre l'espace et la vitesse. En effet, si dans la formule :

$$dx = vdt,$$

on remplace dt par sa valeur (2), on a :

$$dx = -\frac{1}{g} \frac{vdv}{1 + k^2v^2},$$

d'où :

$$x = -\frac{1}{2gk^2} l (1 + k^2v^2) + const.;$$

si l'on observe que pour $x = 0$, on a $v = a$, il vient :

$$0 = -\frac{1}{2gk^2} l (1 + k^2a^2) + const.;$$

par conséquent,

$$x = \frac{1}{2gk^2} l \frac{1 + k^2a^2}{1 + k^2v^2}. \qquad (7)$$

Si l'on désigne par h la hauteur la plus grande à laquelle parvient le mobile, et par T le temps de l'ascension, on a, en faisant $v = 0$ dans les formules (7) et (3) :

$$h = \frac{1}{2gk^2}\, l\,(1 + k^2a^2),$$

$$T = \frac{1}{gk} \text{ arc tg } ka.$$

Le mobile parvenu à cette hauteur h, commence à descendre, et, si nous désignons par a' la vitesse qu'il possède lorsqu'il revient au point de départ, et par T' la durée de la chute, nous aurons, en vertu des formules (5) et (3) (n° **10**) :

$$h = \frac{1}{2gk^2}\, l\, \frac{1}{1 - k^2a'^2},$$

$$T' = \frac{1}{2gk}\, l\, \frac{1 + ka'}{1 - ka'};$$

en égalant les deux valeurs de h, on a :

$$\frac{1}{1 - k^2a'^2} = 1 + k^2a^2,$$

ou bien :

$$(1 + k^2a^2)(1 - k^2a'^2) = 1\,; \qquad (8)$$

d'où l'on tire :

$$a' = \frac{a}{\sqrt{1 + k^2a^2}}. \qquad (9)$$

Or, le dénominateur de cette dernière formule étant plus grand que l'unité, il s'ensuit que a' est toujours plus petit que a. Donc, *la vitesse avec laquelle le mobile revient au point de départ est moindre que la vitesse initiale.* C'est d'ailleurs ce que l'on peut conclure facilement de la formule (8) laquelle nous donne :

$$k^2 (a^2 - a'^2) = k^4 a^2 a'^2,$$

et, par conséquent, $a > a'$.

Proposons-nous maintenant de trouver la *relation qui existe entre le temps* T' *de la chute et le temps* T *de l'ascension.* Nous allons démontrer que T' est plus grand que T. A cet effet, nous donnerons d'abord à l'expression de T une forme différente.

De la formule (8), on tire :

$$a = \frac{a}{\sqrt{1 - k^2 a'^2}}, \tag{10}$$

par conséquent,

$$T = \frac{1}{gk} \text{ arc tg } \frac{ka'}{\sqrt{1 - k^2 a'^2}};$$

d'ailleurs, de la formule (10), on conclut, puisque la vitesse initiale a est toujours réelle, que l'on a $ka' < 1$.

Cela posé, pour démontrer que $T' > T$, remarquons que l'on a :

$$T' - T = \frac{1}{gk}\left[\frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + ka'}{1 - ka'} - \text{arc tg} \frac{ka'}{\sqrt{1 - k^2 a'^2}}\right];$$

$T' - T$ est donc une fonction de a' : or, pour $a' = 0$, on a $T' - T = 0$. Donc, si $T' > T$, il faut que pour toutes

les valeurs possibles de a', la fonction $T' - T$ soit croissante, et, par conséquent, que sa dérivée soit positive.

Mais, on trouve facilement :

$$\frac{d(T' - T)}{da'} = \frac{1}{g\sqrt{1 - k^2a'^2}}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - k^2a'^2}} - 1\right\};$$

or, ka' étant plus petit que l'unité, $\sqrt{1 - k^2a'^2}$ est réel; d'ailleurs, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2a'^2}} > 1,$$

et. par suite, la dérivée de $T' - T$ est positive; cette fonction est donc croissante, et l'on en conclut que le *temps de la chute est plus grand que celui de l'ascension*.

CHAPITRE II.

Mouvement curviligne d'un point libre.

12. D'après ce que nous avons vu, si la direction de la force qui agit sur un point matériel libre est variable, ou, si la direction de la force étant constante, le mobile a reçu une vitesse initiale dont la direction ne coïncide pas avec celle de la force, *le mouvement est curviligne.*

Or, nous savons que, de quelque manière que la force varie en grandeur et en direction, l'accélération totale du mouvement de ce point est à chaque instant dirigée suivant la direction de la force, et qu'elle est de même sens. Nous savons aussi que, m étant la masse du point matériel, la grandeur de la force est liée à la grandeur de l'accélération par la relation (I, nº **198**) :

$$P = m\varphi.$$

13. Cela posé, proposons-nous de trouver *les équations différentielles du mouvement d'un point matériel libre soumis à l'action d'une force donnée* P.

Rappelons-nous d'abord que si l'accélération φ est la résultante de plusieurs accélérations φ', φ'',... la force P est de même la résultante des forces P', P'',... respectivement égales à $m\varphi'$, $m\varphi''$,... *appliquées suivant*

les directions de ces accélérations. En d'autres termes, à toute décomposition de l'accélération totale correspond une décomposition analogue de la force P.

D'après cela, soient x, y, z les coordonnées du point matériel m, rapporté à trois axes rectangulaires, m la masse de ce point, et P la force qui le sollicite. Nous pouvons décomposer l'accélération φ parallèlement aux axes, et nous aurons pour les accélérations des mouvements projetés :

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

La force P peut être décomposée suivant les trois mêmes axes. Soient X, Y, Z ses trois composantes : elles sont respectivement égales au produit de la masse m par l'accélération correspondante. Nous aurons donc les équations :

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ce sont les *équations différentielles du mouvement.*

Remarque I. — Si le mouvement s'effectue dans un plan, on peut le rapporter à deux axes rectangulaires pris dans ce plan, et les équations différentielles du mouvement seront :

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y = m \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Remarque II. — On peut aussi décomposer l'accélération φ en deux accélérations ; l'une tangentielle, l'autre centripète, qui ont pour expressions :

$$\frac{dv}{dt}, \quad \text{et} \quad \frac{v^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire.

Si l'on décompose la force P en deux forces dirigées, l'une T suivant la tangente, l'autre N suivant la normale principale ou le rayon de courbure, ces deux composantes étant respectivement égales au produit de la masse par l'accélération correspondante, nous aurons les deux équations :

$$T = m \frac{dv}{dt},$$

$$N = \frac{mv^2}{\rho}.$$

La force T s'appelle la *force tangentielle*, et la force N la *force centripète.*

On voit par ces deux dernières équations que *le changement de grandeur* que *la vitesse* du mobile éprouve avec le temps est uniquement dû à la *force tangentielle*, et le *changement de direction* de cette vitesse est uniquement dû à *la force centripète.*

On en conclut encore que, si la force tangentielle est constamment nulle, c'est-à-dire si *la force* P est à chaque instant *normale à la trajectoire*, la vitesse du mobile sera constante, et le *mouvement* sera *uniforme;* si la force P est à chaque instant dirigée suivant la tangente à la trajectoire, cette *trajectoire* sera une *ligne droite* ($\rho = \infty$).

Intégration des équations différentielles du mouvement.

14. Problème I. — *Connaissant le mouvement d'un point matériel, trouver la force motrice et la vitesse du point à un instant quelconque.*

Si le mouvement du point matériel est donné, on connaît x, y, z en fonction de t, et il est facile de déterminer la force motrice et la vitesse du point matériel.

En effet, en différentiant, on a les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ en fonction de t, et, par suite, on connaît la vitesse en grandeur et en direction.

En différentiant de nouveau, on obtiendra les valeurs de $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, et, par conséquent, on connaîtra la force motrice en grandeur et en direction.

15. Problème II. — *On donne la force motrice en fonction du temps t, de la vitesse et de la position du mobile, et l'on demande de déterminer le mouvement du point matériel.*

Supposons donc que l'on donne X, Y, Z en fonction de $t, x, y, z, v_x, v_y, v_z$: nous aurons les trois équations :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= f_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= f_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous avons donc à intégrer trois équations différentielles simultanées du second ordre. Les intégrales de ces équations, c'est-à-dire les équations finies du mouvement, renferment six constantes arbitraires distinctes, et l'on a :

$$\left.\begin{aligned}x &= \varphi_1(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\ y &= \varphi_2(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\ z &= \varphi_3(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6).\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Pour déterminer ces constantes, il suffit de connaître pour $t = 0$, c'est-à-dire pour l'origine du temps, la position du mobile, et sa vitesse en grandeur et en direction. On doit donc connaître les coordonnées x_0, y_0, z_0 du mobile pour $t = 0$, et les valeurs $(v_x)_0$, $(v_y)_0$, $(v_z)_0$ des composantes de sa vitesse pour $t = 0$.

Or, si l'on fait $t = 0$ dans les équations (2), et si l'on y fait en même temps $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on aura trois équations entre les six constantes.

D'autre part, en différentiant les équations (2) par rapport à t, on a pour les composantes de la vitesse du mobile :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \psi_1 (t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\ \frac{dy}{dt} &= \psi_2 (t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6),\\ \frac{dz}{dt} &= \psi_3 (t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6).\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si l'on fait, dans ces équations (3), $t = 0$, et en même temps si l'on y remplace $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs initiales $(v_x)_0$, $(v_y)_0$, $(v_z)_0$, on aura trois nouvelles équations entre les six constantes.

Nous aurons donc en tout six équations pour déterminer les six constantes. En substituant les valeurs ainsi obtenues de ces constantes dans les équations (2) et (3), on a les équations définitives du mouvement. Enfin, en éliminant t entre les équations (2), on aura deux équations en x, y, z, qui seront *les équations de la trajectoire.*

Remarque. — On peut résoudre les équations (2) et (3) par rapport aux constantes qui seront ainsi exprimées en fonction de $t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$. Les équations (2) et (3) peuvent donc être remplacées par les six équations :

$$\left.\begin{aligned}c_1 &= F_1 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ c_2 &= F_2 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ c_6 &= F_6 \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ainsi donc, l'intégration des équations (1) nous donne six fonctions de t, x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, qui restent constantes pendant toute la durée du mouvement.

Ces six équations sont ce que l'on appelle les *intégrales* des équations du mouvement.

16. PROPRIÉTÉ. — *Toute autre fonction des mêmes variables qui resterait constante pendant toute la durée du mouvement sera exprimable en fonction des six premières fonctions.*

En effet, si aux équations (4) on ajoute une septième équation :

$$c = F\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \tag{5}$$

c étant une nouvelle constante, on pourra éliminer $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ entre les équations (4) et (5), et l'on obtiendra une équation :

$$F(t\, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c) = 0. \tag{6}$$

Or, de cette équation il résulterait que c varie avec le temps, ce qui est contraire à l'hypothèse. Si donc c est une constante, le temps t doit disparaître de lui-même de l'équation (6), et cette équation exprime alors c en fonction des six constantes c_1, c_2,... c_6 seulement. Par conséquent, l'équation (5) rentre dans les équations (4) : elle n'exprime pas une propriété du mouvement distincte de celles qui résultent des équations (4).

REMARQUE. — Il résulte de ce que nous venons de voir que le problème de l'intégration des équations

du mouvement d'un point matériel se réduit à chercher six fonctions de t, x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, qui restent constantes pendant toute la durée du mouvement.

Donc, du moment où, par une combinaison quelconque des équations du mouvement, on parvient à une équation intégrable, l'intégrale de cette équation sera une intégrale du problème. N'oublions pas que chaque intégrale exprime une propriété du mouvement.

Il arrive même, dans certains cas, que l'on peut trouver des intégrales nouvelles au moyen des intégrales déjà obtenues. Ainsi, par exemple, en appliquant une méthode remarquable due à Jacobi, et que nous avons exposée ailleurs[1], on peut, dans certains cas, connaissant deux intégrales d'un problème de Mécanique, en déduire une troisième par de simples différentiations.

---

1. *Sur l'intégration des équations de la Mécanique*, Liège, Desoer, 1889.

CHAPITRE III.

Théorèmes généraux de la Dynamique du point.

Théorème des quantités de mouvement.

17. On appelle *quantité de mouvement* d'un point matériel de masse m, animé d'une vitesse v, le produit mv de la masse par la vitesse (I, n° **202**). On peut assimiler ce produit à une force, en attribuant à la quantité de mouvement la *direction de la vitesse* v. On lui donne le *signe de la vitesse*.

On peut représenter la quantité de mouvement d'un point matériel par une longueur mA qui lui est proportionnelle, portée sur la tangente à partir du point m dans le sens du mouvement.

La quantité de mouvement étant assimilée à une force, on peut la décomposer comme une force suivant trois axes coordonnés. Chaque composante sera la quantité de mouvement projetée sur l'axe.

On peut aussi prendre le *moment de la quantité de mouvement* par rapport à un axe : c'est le produit de la projection de mA sur un plan perpendiculaire à l'axe par la plus courte distance de mA à cet axe. On lui donnera le signe + ou le signe — suivant les conventions adoptées (I, n° **234**).

18. Dans le mouvement rectiligne d'un point matériel de masse m, soumis à l'action d'une force P, on a :

$$m \frac{dv}{dt} = \mathrm{P},$$

d'où :

$$mdv = \mathrm{P}dt.$$

En intégrant entre les limites 0 et t, et désignant par v_0 la vitesse du mobile pour $t = 0$, on a :

$$mv - mv_0 = \int_0^t \mathrm{P}dt.$$

Le produit Pdt est ce que l'on appelle l'*impulsion élémentaire* de la force P ; l'intégrale $\int_0^t \mathrm{P}dt$ s'appelle l'*impulsion totale* de la force pendant le temps auquel l'intégrale se rapporte.

On voit que l'impulsion d'une force est une quantité composée de l'intensité de la force et du temps de son action.

19. Les deux dernières équations nous donnent donc les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Dans un mouvement rectiligne, l'accroissement élémentaire de la quantité de mouvement du mobile pendant l'intervalle de temps dt, est égal à l'impulsion élémentaire de la force* P *pendant ce temps.*

THÉORÈME II. — *Dans un mouvement rectiligne, l'accroissement total de la quantité de mouvement pendant un temps fini quelconque t, est égal à l'impulsion totale de la force* P *pendant ce temps.*

20. Dans le cas d'un mouvement curviligne, on a, en désignant par T la composante tangentielle de la force :

$$m\frac{dv}{dt} = \mathrm{T},$$

d'où :

$$mdv = \mathrm{T}dt,$$

et, en intégrant,

$$mv - mv_0 = \int_0^t \mathrm{T}dt.$$

On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un mouvement curviligne, l'accroissement de la quantité de mouvement d'un point matériel pendant un temps quelconque infiniment petit ou fini, est égal à l'impulsion de la force tangentielle pendant ce temps.*

21. REMARQUE I. — Si la force P est la résultante de plusieurs forces agissant sur le point m, la composante tangentielle de P est égale à la somme algébrique des composantes tangentielles des forces appliquées au point m. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un mouvement curviligne, l'accroissement de la quantité de mouvement d'un point matériel pendant un temps quelconque est égal à la somme des impulsions élémentaires tangentielles de toutes les forces qui agissent sur le point matériel pendant ce temps.*

22. REMARQUE II. — Le théorème des quantités de mouvement peut être appliqué au mouvement projeté sur une droite fixe.

Considérons, en effet, le mouvement projeté sur l'axe des x, par exemple ; nous aurons l'équation :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X};$$

on en tire :

$$mdv_x = Xdt,$$

d'où, en intégrant,

$$mv_x - m(v_x)_0 = \int_0^t Xdt.$$

Or, l'axe des x étant une droite quelconque, on en conclut le théorème suivant :

Théorème. — *L'accroissement pendant un intervalle de temps infiniment petit ou fini de la quantité de mouvement projetée sur un axe fixe est égal à l'impulsion de la force projetée pendant ce temps.*

Théorème des moments des quantités de mouvement.

23. Reprenons les équations du mouvement d'un point matériel libre :

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$Y = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$Z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Multipliant la première par y, la seconde par x, et retranchant, il vient :

$$Yx - Xy = m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Or, le second membre de cette équation n'est autre que la dérivée par rapport à t de l'expression :

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right);$$

on a donc :

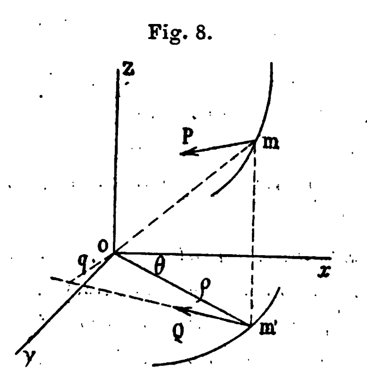
$$Yx - Xy = m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right).$$

Mais, si l'on désigne par Q la projection de la force P sur le plan des xy (fig. 8), et par q la distance de cette projection à l'origine O, on a :

$$Qq = Yx - Xy.$$

D'autre part, la quantité de mouvement étant considérée comme une force, ses composantes sont $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$; par conséquent, l'expression $m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$ n'est autre que le moment par rapport à l'origine O de la quantité de mouvement du mouvement projeté sur le plan des xy, ou le moment par rapport à l'axe des z de la quantité de mouvement du point m

Fig. 8.



En désignant par u la vitesse du mouvement projeté, par p sa distance à l'origine, on a :

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = mup;$$

par conséquent,

$$Qq = \frac{d(mup)}{dt},$$

ou bien :

$$d(mup) = Qq\,dt.$$

On en tire, en intégrant, et désignant par u_0, et p_0 les valeurs de u et de p pour $t = 0$,

$$mup - mu_0p_0 = \int_0^t Qq\,dt.$$

Mais, $\int_0^t Qq\,dt$ est la somme des moments par rapport à l'origine O des impulsions élémentaires de la force projetée sur le plan des xy, ou la somme des moments par rapport à l'axe des z des impulsions élémentaires de la force P. D'ailleurs, le plan des xy est quelconque. On a donc le théorème suivant ;

Théorème. — *L'accroissement total du moment de la quantité de mouvement projetée sur un plan par rapport à un point quelconque du plan de projection pendant un temps quelconque, est égal à la somme des moments par rapport à ce point des impulsions élémentaires de la force projetée pendant ce temps.*

24. On peut encore énoncer ce théorème de la manière suivante :

THÉORÈME. — *L'accroissement total du moment de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport à un axe pendant un temps quelconque est égal à la somme des moments par rapport à cet axe des impulsions élémentaires de la force pendant ce temps.*

25. REMARQUE. — Si la direction de la force P rencontre constamment l'axe des z, ou lui est parallèle, le moment de la force P par rapport à cet axe sera nul à chaque instant, et nous aurons :

$$Qq = Yx - Xy = 0;$$

on a alors :

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = const.,$$

ou bien :

$$mup = mu_0 p_0 = const.,$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque la direction de la force appliquée à un point mobile rencontre constamment une droite fixe ou lui est parallèle, le moment de la quantité de mouvement du point par rapport à cette droite est constant.*

L'équation :

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = const.,$$

est une *intégrale première* des équations différentielles du mouvement.

Théorème des aires.

26. L'équation (n° **23**) :

$$Yx - Xy = m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right), \qquad (1)$$

peut donner lieu à une interprétation géométrique remarquable.

Soient m' la projection du point m sur le plan des xy (fig. 8), ρ et θ les coordonnées polaires de ce point m' ; on a facilement :

$$xdy - ydx = \rho^2 d\theta.$$

Or, $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ est l'aire élémentaire décrite pendant le temps dt par le rayon vecteur ρ sur le plan des xy. En désignant par A_z l'aire décrite par ce rayon vecteur à la fin du temps t, cette aire étant comptée à partir d'une droite fixe, l'axe des x par exemple, nous aurons :

$$xdy - ydx = 2dA_z.$$

Par suite, l'équation (1) nous donne :

$$Yx - Xy = 2m\frac{d^2A_z}{dt^2} = m\frac{d^2(2A_z)}{dt^2},$$

ou bien :

$$Qq = m\frac{d^2(2A_z)}{dt^2},$$

Q et q ayant la signification indiquée précédemment (nº **23**). D'ailleurs, le plan des xy étant quelconque, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans le mouvement projeté sur un plan, le moment de la force projetée est relié au double de l'aire décrite par la projection du rayon vecteur par la même loi qui relie la force et l'espace parcouru dans le mouvement rectiligne.*

27. Si la direction de la force P rencontre constamment l'axe des z, ou lui est parallèle, le moment Qq est nul à chaque instant, et l'on a :

$$\frac{d^2(2A_z)}{dt^2} = 0,$$

d'où :

$$\frac{dA_z}{dt} = \frac{c}{2},$$

et, par suite, en intégrant de nouveau :

$$A_z = \frac{c}{2} t,$$

la constante étant nulle, si l'on admet que l'on compte les aires à partir de la position initiale du rayon vecteur ρ.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque la direction de la force motrice rencontre constamment un axe fixe ou lui est parallèle, le rayon vecteur mené d'un point* O *de cet axe au point mobile, projeté sur un plan perpendiculaire à l'axe, décrit dans ce plan des aires proportionnelles au temps.*

C'est en cela que consiste le théorème de la *conservation des aires*, ou mieux de la *proportionnalité des aires*.

28. Supposons maintenant que la *direction de la force* P *passe constamment par un point fixe* O, et prenons ce point pour origine. La force P rencontrant alors les trois axes coordonnés, nous pouvons appliquer le théorème précédent à chacun de ces axes, et nous aurons les trois équations :

$$A_x = \frac{A}{2} t,$$

$$A_y = \frac{B}{2} t,$$

$$A_z = \frac{C}{2} t,$$

qui sont équivalentes aux trois suivantes :

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = A,$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = B,$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C.$$

Les constantes A, B, C se déterminent au moyen des conditions initiales, c'est-à-dire au moyen de la position initiale du mobile, et de la grandeur et de la direction de la vitesse initiale.

Les trois dernières équations n'étant autres que des combinaisons analytiques des équations du mouvement

sont des ***intégrales des équations du mouvement.*** Ce sont des ***intégrales premières*** de ces équations.

29. On en déduit facilement que la ***trajectoire*** du mobile est une ***courbe plane, dont le plan passe par l'origine des coordonnées.***

En effet, on sait que l'on obtient les équations de la trajectoire en éliminant t entre les expressions des coordonnées (I, n° **52**), ce qui nous donne deux équations finies entre les trois variables x, y, z. Or, en multipliant les trois équations précédentes respectivement par x, y, z, et ajoutant, on obtient une équation indépendante du temps :

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Cette équation est donc une des équations de la trajectoire. Or, elle représente un plan passant par l'origine des coordonnées. Donc, la trajectoire est plane, et son plan passe par le point fixe O.

30. De ce que la trajectoire est plane, on déduit, en désignant par S l'aire décrite par le rayon vecteur Om, et en appliquant le théorème des projections des aires planes :

$$S = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2},$$

par suite,

$$S = \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \,.\, t.$$

Donc, l'aire décrite par le rayon vecteur dans l'espace est proportionnelle au temps. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Quand la force qui sollicite un point matériel libre passe constamment par un centre fixe, la trajectoire est une courbe plane dont le plan passe par ce centre, et le rayon vecteur mené du centre au point mobile décrit, dans ce plan, des aires proportionnelles au temps.*

Cette propriété constitue le *théorème des aires.*

31. Réciproquement, si le rayon vecteur mené d'un point fixe O à un point libre m, décrit une aire plane qui varie proportionnellement au temps, la force qui sollicite le point matériel passera par le point O.

En effet, si le rayon vecteur décrit une aire plane qui varie proportionnellement au temps, la même propriété aura lieu pour les aires décrites par les projections du rayon vecteur Om sur trois plans rectangulaires passant par le point O.

Les dérivées de ces aires par rapport au temps seront donc constantes, et nous aurons les équations :

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = A,$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = B,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

Par conséquent, en différentiant, on a :

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0,$$

$$z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

ou bien, en ayant égard aux équations du mouvement :

$$Zy - Yz = 0,$$

$$Xz - Zx = 0,$$

$$Yx - Xy = 0,$$

d'où :

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Donc, *la direction de la force coïncide avec celle du rayon vecteur et par conséquent elle passe par le point* O.

32. PROPRIÉTÉ. — *Lorsque la force qui sollicite un point matériel est constamment dirigée vers un centre fixe, la vitesse de ce point est à chaque instant inversement proportionnelle à la perpendiculaire abaissée du centre fixe sur la direction de la vitesse.*

En effet, on sait (n° **25**) que, dans ce cas, le moment de la quantité de mouvement dans chacun des trois plans coordonnés est une quantité constante, et l'on a pour chacun de ces plans la relation :

$$mup = const.$$

Or, la trajectoire étant plane, on peut prendre son plan pour plan des xy, par exemple, et l'on a dans ce plan, u étant alors la vitesse du point matériel :

$$mup = const.,$$

ou bien :

$$up = K,$$

d'où :

$$u = \frac{K}{p},$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Théorème des forces vives. Surfaces de niveau.

33. TRAVAIL D'UNE FORCE. — Avant d'établir le théorème des forces vives, nous devons donner quelques détails sur le *travail des forces.*

Supposons un point matériel sollicité par une force constante en grandeur et en direction, la direction du mouvement coïncidant avec celle de la force. On appelle *Travail de la force* P le produit de cette force par le chemin décrit par son point d'application. Si donc AB est le chemin décrit par le point d'application de la force P pendant un temps t quelconque, le produit $P \times AB$ sera le travail de la force pendant ce temps.

Considérons maintenant un point matériel libre sollicité par une force quelconque dont la grandeur et la direction sont données à chaque instant. Sous l'action de cette force, le point subit, pendant un temps infiniment petit dt, un déplacement infiniment petit mm', dont la direction ne coïncide pas, en général, avec la direction de la force. On appelle *Travail élémentaire de la force* P, le produit de cette force par la projection sur sa direction du déplacement élémentaire ds du point d'application.

Si donc on désigne par α l'angle du déplacement, *compté dans le sens du mouvement*, avec la direction de la force, *comptée dans le sens de la force*, le travail élémentaire de la force P sera :

$$P \, . \, ds \cos \alpha.$$

Ce travail élémentaire sera *positif* ou *négatif*, suivant que la projection du déplacement est dirigée dans le sens de la force, ou en sens contraire. Il sera donc positif ou négatif, suivant que l'angle α sera aigu ou obtus ; si l'angle α est droit, le travail élémentaire sera nul.

En Mécanique appliquée, un travail positif est un *travail moteur*, et un travail négatif est un *travail résistant*.

Remarque. — L'expression du travail élémentaire peut être mise sous la forme :

$$P \cos \alpha \, . \, ds \, ;$$

sous cette forme, on voit que *le travail élémentaire est le produit du déplacement élémentaire ds par la projection sur le déplacement de la grandeur de la force.*

34. Théorème. — *Si plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel, le travail élémentaire de la résultante est égal à la somme des travaux élémentaires des composantes.*

La démonstration de ce théorème est identique à celle que nous avons donnée (I, n° **377**) pour le théorème des moments virtuels.

35. Travail total. — Si un point matériel, libre ou non, parcourt une trajectoire AB, et est sollicité par une force variable en grandeur et en direction,

le *travail total* de la force, pendant que le point décrit un arc quelconque de la trajectoire, *est égal à la somme des travaux élémentaires de cette force correspondant aux différents éléments dont se compose le chemin parcouru par le mobile.*

En désignant par ds l'élément de la trajectoire, par α l'angle que fait la tangente au point m dans le sens du mouvement avec la force en ce point dans le sens où elle agit, nous aurons pour l'expression du travail total :

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{P} \cos \alpha \,.\, ds.$$

REMARQUE. — Si l'on désigne par T la composante tangentielle de la force P, on a :

$$\mathrm{P} \cos \alpha = \mathrm{T} ;$$

par conséquent, l'expression du travail total peut être mise sous la forme :

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{T} ds.$$

On en conclut que *le travail élémentaire d'une force est égal au travail élémentaire de la composante tangentielle; le travail total est égal à la somme des travaux élémentaires de la composante tangentielle.*

36. THÉORÈME. — *Si plusieurs forces agissent simultanément sur un même point matériel, le travail total de la résultante de ces forces pendant un temps quelconque est égal à la somme des travaux des composantes.*

Ce théorème est évident, puisqu'il a lieu pour chacun des éléments dont se compose le déplacement total du point.

37. Unité de travail. — Le travail, comme nous l'avons défini, est le produit d'une force par une longueur. Si nous prenons le kilogramme pour unité de force, et le mètre pour unité de longueur, *l'unité de travail* sera bien déterminée. Ce sera le travail développé par une force *constante* d'un kilogramme, lorsque son point d'application se déplace d'un mètre suivant sa direction.

Cette unité de travail s'appelle le *kilogrammètre*.

38. Ces notions établies, reprenons l'équation différentielle :

$$m \frac{dv}{dt} = \text{T},$$

T étant la composante tangentielle de la force.

Multipliant les deux membres par ds, il vient :

$$m \frac{ds}{dt} dv = \text{T}ds,$$

ou bien :

$$mv\,dv = \text{T}ds.$$

En intégrant entre les limites correspondant à deux positions du mobile, on a :

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_{s_0}^{s} \text{T}ds = 2\int_{s_0}^{s} \text{P}\cos\alpha\, ds; \qquad (1)$$

v_0 étant la vitesse du mobile lorsqu'il occupe la position pour laquelle l'arc s est égal à s_0.

Le produit mv^2 de la masse d'un point matériel par le carré de sa vitesse est ce que l'on appelle la *force vive de ce point*. L'expression $\frac{1}{2} mv^2$ s'appelle la *puissance vive*. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'accroissement de la force vive d'un point matériel pendant un intervalle de temps quelconque, est égal au double du travail de la force* P *pendant ce temps.*

C'est en cela que consiste le *théorème des forces vives* pour le cas d'un point matériel libre.

39. L'équation (1) peut être mise sous une autre forme qu'il est nécessaire de connaître.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du mobile à un instant quelconque, X, Y, Z les composantes de la force P parallèlement aux axes. On sait que le travail élémentaire de la force P est égal (n° **34**) à la somme algébrique des travaux élémentaires de ses composantes X, Y, Z. Or, le travail élémentaire de la force X est égal au produit de cette force par la projection du déplacement ds sur sa direction, projection qui est égale à dx : ce travail est donc $\mathrm{X}dx$. De même, les travaux élémentaires des forces Y et Z sont respectivement $\mathrm{Y}dy$ et $\mathrm{Z}dz$. Par suite, le travail élémentaire de la force P a pour expression :

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz,$$

et l'équation (1) peut alors être mise sous la forme suivante :

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\int_0^t (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz); \qquad (2)$$

l'intégrale du second membre doit être prise entre les limites correspondant aux positions extrêmes du mobile, c'est-à-dire entre les limites 0 et t du temps.

CAS PARTICULIERS. — *Si la force* P *est normale à la trajectoire* en chaque point, on a : $T = 0$, et l'équation (1) nous donne :

$$v = v_0 ;$$

par conséquent, *le mouvement est uniforme.*

Si la force P *est nulle*, l'équation (1) nous donne encore :

$$v = v_0,$$

et *le mouvement* est aussi *uniforme.*

40. REMARQUE. — L'intégrale du second membre de l'équation (2) a toujours un sens bien défini. En effet, x, y, z sont des fonctions du temps t; par conséquent, dx, dy, dz sont aussi des fonctions de t, multipliées par dt. D'autre part, X, Y, Z sont, en général, des fonctions de x, y, z et de t, et, par conséquent, des fonctions de t. Il en résulte que $Xdx + Ydy + Zdz$ se réduit en dernière analyse à une fonction de t, multipliée par dt; par suite, l'intégrale du second membre peut toujours être calculée, quand le problème est résolu, et l'on peut ainsi vérifier le théorème des forces vives. Mais, il est évident que, dans ce cas, l'équation ne saurait être d'aucune utilité pour la connaissance des lois du mouvement : elle ne fournit aucune intégrale des équations du mouvement.

41. Il existe un cas où le théorème des forces vives prend une forme très remarquable : c'est lorsque

les composantes de la force motrice étant des fonctions des coordonnées x, y, z du mobile, l'expression

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

est une *différentielle exacte d'une certaine fonction de* x, y, z que nous désignerons par $\varphi(x, y, z)$. On pourra alors intégrer cette expression sans rien connaître d'ailleurs des valeurs effectives de x, y, z en fonction de t.

En intégrant entre les limites 0 et t, et désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du mobile pour $t = 0$, et par v_0 la vitesse à cet instant, l'équation (2) nous donne :

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

Elle constitue alors une *intégrale des équations du mouvement*, et l'on dit que, dans ce cas, l'*intégrale des forces vives existe.*

42. Nous pouvons observer que, pour que la condition d'intégrabilité soit remplie, on doit avoir les trois identités :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

C'est ce qui arrivera *lorsque* X, Y, Z *s'exprimeront par les dérivées partielles d'une même fonction de* x, y, z *ne renfermant pas explicitement le temps.*

Ainsi, par exemple, si l'on a :

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

il vient :

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\,\varphi\,(x, y, z).$$

L'intégrale des forces vives est :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \varphi\,(x, y, z) - \varphi\,(x_0, y_0, z_0). \quad (3).$$

Cette fonction φ qui jouit de la propriété que ses dérivées partielles prises par rapport aux coordonnées sont égales aux composantes de la force, s'appelle *fonction de force*. Il résulte de ce qui précède que, *s'il existe une fonction de force ne renfermant pas explicitement le temps, l'intégrale des forces vives existe.*

43. L'équation des forces vives nous donne les propriétés suivantes :

1° L'accroissement de la force vive, lorsque le mobile passe de la position (x_0, y_0, z_0) à la position (x, y, z) ne dépend que des coordonnées des points extrêmes : cet accroissement est indépendant de la trajectoire que le mobile a parcourue dans l'intervalle et du temps qui s'est écoulé entre les positions extrêmes.

2° La vitesse v du mobile est déterminée par la position qu'il occupe à l'instant considéré, de sorte que, si le mobile repasse plusieurs fois par la même position, il y repassera chaque fois avec la même vitesse.

44. Surfaces de niveau. — L'équation :

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\,\{\varphi\,(x, y, z) - \varphi\,(x_0, y_0, z_0)\}, \quad (3)$$

nous apprend que, si la fonction $\varphi\,(x, y, z)$ reste invariable, la vitesse ne changera pas.

Or, si nous considérons l'équation :

$$\varphi(x, y, z) = c,$$

c étant une constante, nous voyons que, pour chaque valeur de c, cette équation représente une surface.

Les diverses surfaces que l'on obtient en donnant à c des valeurs différentes s'appellent *surfaces de niveau*. Par chaque point de l'espace, il passe une surface de niveau et une seule, du moins si la fonction $\varphi(x, y, z)$ a une valeur unique et déterminée pour un système donné de valeurs de x, y, z.

De l'équation (3) il résulte que, *si le mobile traverse plusieurs fois une même surface de niveau*, sa vitesse reprendra chaque fois la même valeur, puisque, pour tous les points de cette surface, $\varphi(x, y, z)$ reprend la même valeur. Ce résultat est indépendant du chemin parcouru par le mobile pour arriver à la surface, et du nombre de fois qu'il l'aura traversée entre les deux époques considérées.

45. PROPRIÉTÉ. — *Deux surfaces de niveau ne peuvent se rencontrer.*

Cela résulte de ce que deux surfaces de niveau ont pour équations :

$$\varphi(x, y, z) = c, \quad \varphi(x, y, z) = c',$$

et ces équations ne peuvent être vérifiées par les mêmes valeurs de x, y, z.

46. PROPRIÉTÉ. — *La force qui agit sur le mobile en un point quelconque de l'espace, est normale à la surface de niveau qui passe par ce point.*

En effet, on a :

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \qquad (4)$$

or, X, Y, Z sont proportionnels aux cosinus directeurs de la force, et $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à la surface de niveau.

Les équations (4) expriment donc que la force coïncide avec la normale à la surface.

Remarque. — On peut encore démontrer cette propriété au moyen de l'équation différentielle des surfaces de niveau :

$$X dx + Y dy + Z dz = 0.$$

En effet, X, Y, Z étant proportionnels aux cosinus des angles que la force P fait avec les axes, et dx, dy, dz étant proportionnels aux cosinus des angles qu'un élément rectiligne de la surface fait avec les axes, l'équation précédente exprime la condition de perpendicularité de la force à la surface.

47. Si l'on considère deux surfaces de niveau :

$$\varphi(x, y, z) = c', \quad \varphi(x, y, z) = c'',$$

rencontrées par le mobile respectivement aux points (x, y, z), (x', y', z'), nous aurons :

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - \tfrac{1}{2} m v_0^2 = c' - c''.$$

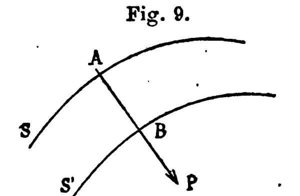
Par conséquent, l'*accroissement de force vive est constant*, et indépendant de la forme de la trajectoire

entre les deux surfaces, ainsi que des points où la trajectoire rencontre les deux surfaces et du temps qui s'est écoulé.

48. Propriété. — *Si l'on considère deux surfaces de niveau infiniment voisines, la distance de ces deux surfaces est, en chaque point de la couche intermédiaire, inversement proportionnelle à la valeur correspondante de la force.*

Soient S et S' deux surfaces de niveau infiniment voisines (fig. 9), et

Fig. 9.



$$\varphi(x, y, z) = c,$$

$$\varphi(x, y, z) = c + dc,$$

les équations de ces surfaces. Soit A un point de la surface S, et menons AB perpendiculaire à S' : la direction AB sera celle de la force P correspondante au point A.

Si le point matériel va de A en B, ou de A en un point quelconque M de la surface S' infiniment voisin, et si nous désignons par v_0 la vitesse du mobile sur la surface S, et par v sa vitesse sur S', par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point A, et par x, y, z les coordonnées au point M de S', nous aurons :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0) = dc.$$

Mais, $\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$ est égal au travail de la force P, travail qui est égal à P . AB, quelle que soit la position du point M sur S' [1] ; on a donc :

$$P \,.\, AB = dc.$$

1. AB est évidemment la projection sur la force P du chemin parcouru par le mobile en allant du point A en un point quelconque M de S' infiniment voisin de A.

Or, dc a la même valeur en tous les points de la couche infiniment mince comprise entre les deux surfaces S et S'. Donc, en chaque point la valeur de la force P est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la couche, ou à la distance des deux surfaces.

49. Remarque. — Parmi les cas où il existe *une fonction de force*, c'est-à-dire pour lesquels $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, nous citerons celui où *la force est constante en grandeur, direction et sens.*

En prenant l'axe des z parallèle à la direction de la force, on aura :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = P,$$

et, par suite,

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pdz.$$

L'*intégrale des forces vives* est, dans ce cas,

$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = P(z - z_0),$$

ou bien, en général,

$$mv^2 = 2Pz + c.$$

Les *surfaces de niveau* ont pour équation :

$$Pdz = 0, \quad \text{d'où :} \quad dz = 0,$$

et, par conséquent,

$$z = const.$$

Les *surfaces de niveau sont donc des plans parallèles entre eux et perpendiculaires à la direction constante de la force* P.

Si le point est soumis à la seule action de la pesanteur, on a $P = mg$, et alors l'intégrale des forces vives est :

$$v^2 = 2gz + c\,;$$

les surfaces de niveau sont des *plans horizontaux.*

50. Un autre cas important où il existe une fonction de force est celui où *le point matériel est sollicité par des forces dirigées vers des centres fixes, et dont les intensités sont des fonctions des distances du point mobile aux centres fixes.*

Soient, en effet, C (a, b, c) un centre fixe, m (x, y, z) le point mobile, r sa distance au centre fixe, F (r) la force que nous supposerons *attractive.*

Les cosinus des angles que la force fait avec les axes étant :

$$-\frac{x-a}{r}, \quad -\frac{y-b}{r}, \quad -\frac{z-c}{r},$$

il s'ensuit que les composantes de la force sont :

$$-F(r)\,.\,\frac{x-a}{r}, \quad -F(r)\,.\,\frac{y-b}{r}, \quad -F(r)\,.\,\frac{z-c}{r};$$

nous aurons donc :

$$Xdx + Ydy + Zdz = -\frac{F(r)}{r}\Big\{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz\Big\}.$$

Or, de la relation :

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

on tire :

$$rdr = (x - a)\,dx + (y - b)\,dy + (z - c)\,dz,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz = -\,\mathrm{F}(r)\,dr.$$

L'intégrale des forces vives est alors :

$$mv^2 = -\,2\int \mathrm{F}(r)\,dr + c,$$

et la vitesse reprend la même valeur chaque fois que le mobile revient à la même distance du centre d'action.

On voit que, dans ce cas, la fonction de force est $-\int \mathrm{F}(r)\,dr$. Les surfaces de niveau sont des sphères concentriques ayant pour centre le point C.

Si la force était *répulsive*, il suffirait de changer les signes des cosinus qui auront alors pour valeurs :

$$\frac{x-a}{r},\quad \frac{y-b}{r},\quad \frac{z-c}{r};$$

les composantes de la force changeront de signes, ce qui revient à changer le signe de $\mathrm{F}(r)$.

Si le mobile est sollicité par un certain nombre de forces attractives $\mathrm{F}(r)$, $\mathrm{F}_1(r_1)$, $\mathrm{F}_2(r_2)$, ... dirigées vers des centres fixes, on aura pour l'intégrale des forces vives :

$$mv^2 = -\,2\int \mathrm{F}(r)\,dr - 2\int \mathrm{F}_1(r_1)\,dr_1 + \ldots + c$$

$$= -\,2\,\Sigma\int \mathrm{F}(r)\,dr + c.$$

La fonction de force est alors :

$$-\int F(r)\,dr - \int F_1(r_1)\,dr_1 \ldots = -\Sigma \int F(r)\,dr.$$

Théorème de la moindre action.

51. Supposons un problème pour lequel l'intégrale des forces vives existe, de sorte que l'on ait pour tous les points de l'espace :

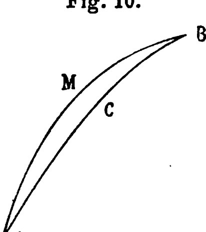
$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0),$$

ou, en abrégé,

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = \varphi(x, y, z) + C. \qquad (1)$$

Supposons que, pour aller de la position A à la position B, prise sur la trajectoire effective AMB (fig. 10), le mobile suive une route quelconque ACB tracée entre ces deux points : l'équation (1) donnera la vitesse du mobile en un point quelconque de cette route.

Fig. 10.



Formons le produit $mv\,ds$ de la quantité de mouvement par l'élément ds de la trajectoire réelle ou de la trajectoire fictive, et considérons l'intégrale :

$$\int mv\,ds,$$

prise entre le point A et le point B.

Le *théorème de la moindre action* consiste en ce que *cette intégrale est, en général, un minimum pour la trajectoire effective*, c'est-à-dire qu'elle est moindre pour cette trajectoire que pour toute autre courbe ACB tracée entre les deux points A et B.

Le produit $mvds$ est ce qu'on appelle la *quantité d'action* du mobile dans le parcours de l'élément ds ; $\int mvds$ est la quantité d'action totale correspondant au passage de A en B.

En vertu de la rèlation $ds = vdt$, on a :

$$\int mvds = \int mv^2 dt,$$

les deux intégrales étant prises entre les mêmes limites, et l'on voit par là que l'*action* est aussi la somme des produits de la force vive par l'élément de temps.

Soient x, y, z les coordonnées du point mobile sur la trajectoire effective. Pour passer aux coordonnées du point sur une trajectoire fictive infiniment voisine, il suffira de remplacer x, y, z, par $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$; les points extrêmes restent fixes.

Voyons ce que devient, par ce changement, l'intégrale:

$$V = \int mvds,$$

prise sur la trajectoire entre les points A et B.

Si nous prenons la variation δV de cette intégrale, il vient :

$$\delta V = \delta \int mvds = \int \delta (mvds) = \int m\delta v\, ds + \int mv\, \delta ds.$$

Or, la première intégrale nous donne, en remplaçant ds par vdt :

$$\int m\delta v\, ds = \int mv\delta v\, dt;$$

mais, $mv\delta v$ est la variation de la force vive, et, par hypothèse, on a, pour tous les points de l'espace :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \varphi(x, y, z) + \text{C},$$

d'où :

$$mv\delta v = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = \text{X}\delta x + \text{Y}\delta y + \text{Z}\delta z;$$

par suite,

$$\int m\delta v\, ds = \int (\text{X}\delta x + \text{Y}\delta y + \text{Z}\delta z)\, dt.$$

Pour transformer la seconde intégrale, observons que l'on a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d'où :

$$ds\,\delta ds = dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz;$$

par conséquent,

$$mv\,\delta ds = m\frac{ds}{dt}\delta ds = m\frac{dx}{dt}\delta dx + m\frac{dy}{dt}\delta dy + m\frac{dz}{dt}\delta dz.$$

On a donc :

$$\delta V = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, dt$$

$$+ \int \left(m \frac{dx}{dt} \delta dx + m \frac{dy}{dt} \delta dy + m \frac{dz}{dt} \delta dz\right).$$

Or, l'intégration par parties nous donne :

$$\int m \frac{dx}{dt} \delta dx = \int m \frac{dx}{dt} d\delta x = m \frac{dx}{dt} \delta x - \int m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x\, dt\,;$$

de même,

$$\int m \frac{dy}{dt} \delta dy = m \frac{dy}{dt} \delta y - \int m \frac{d^2y}{dt^2} \delta y\, dt,$$

$$\int m \frac{dz}{dt} \delta dz = m \frac{dz}{dt} \delta z - \int m \frac{d^2z}{dt^2} \delta z\, dt.$$

Par suite,

$$\delta V = m \left(\frac{dx}{dt} \delta x + \frac{dy}{dt} \delta y + \frac{dz}{dt} \delta z\right)$$

$$+ \int \left\{ \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right) \delta z \right\} dt.$$

Mais, la quantité en dehors du signe $\int$ est nulle aux deux limites, puisque ces deux points sont fixes ; on a donc :

$$\delta V = \int \left\{ \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right) \delta z \right\} dt.$$

Or, pour la trajectoire effective on a, en vertu des équations du mouvement,

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Par conséquent, pour la trajectoire effective, on a $\delta V = 0$ quels que soient δx, δy, δz.

La variation de l'intégrale $\int mv\,ds$ étant nulle pour la trajectoire effective, il en résulte que cette intégrale est minimum pour cette trajectoire.

Il est, d'ailleurs, évident que la fonction V ne peut être un maximum, puisqu'il est toujours possible d'allonger le chemin fictif de telle manière que l'intégrale $\int mv\,ds$, prise le long de ce chemin, croisse au delà de toute limite.

Remarque. — Le théorème de la moindre action ne fait connaître aucune intégrale nouvelle du problème. C'est un complément du théorème des forces vives.

CHAPITRE IV.

Mouvement d'un point matériel qui n'est pas libre. Force effective. — Force d'inertie.

52. Considérons le mouvement d'un point matériel sollicité par une force P, et assujetti à satisfaire à certaines conditions, par exemple, à demeurer sur une surface ou sur une courbe. Il est évident que ce point ne prendra pas, sous l'action de la force P, le même mouvement que s'il était libre. Mais, il est évident aussi que l'on peut déterminer à chaque instant la grandeur et la direction de la force qui devrait agir sur ce point, *s'il était libre*, pour lui communiquer le mouvement qu'il possède.

Cette force est dirigée suivant l'accélération totale du mouvement, et égale au produit de cette accélération totale par la masse du point matériel (I, n° **198**) : on l'appelle la *force effective*. La réaction du point matériel est égale et contraire à cette force effective : on l'appelle la *force d'inertie*.

La force d'inertie d'un point matériel en mouvement est donc une force égale et directement opposée à la force effective, c'est-à-dire à la force qu'il faudrait

appliquer au point matériel, ***supposé libre***, pour lui communiquer le mouvement qu'il possède à l'instant considéré.

Cela posé, soient m la masse du point matériel, x, y, z ses coordonnées à la fin du temps t; les composantes de la force qui, agissant sur ce point libre, produiraient son mouvement sont :

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2};$$

ce sont les composantes de la *force effective*.

La force d'inertie aura donc pour composantes :

$$-m\frac{d^2x}{dt^2},\quad -m\frac{d^2y}{dt^2},\quad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

53. Nous avons vu (n° **13**) que la force qui, agissant sur un point matériel libre, produirait son mouvement peut être décomposée en une force tangentielle, et une force centripète qui ont pour expressions :

$$m\frac{dv}{dt},\quad \frac{mv^2}{\rho},$$

ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire.

La force d'inertie peut aussi être décomposée en deux autres : l'une normale à la trajectoire, l'autre tangentielle, et qui auront respectivement pour expressions :

$$-\frac{mv^2}{\rho},\quad -m\frac{dv}{dt}.$$

On leur donne les noms de *force centrifuge* et de *force tangentielle d'inertie.*

Remarque. — Il faut bien remarquer que la force d'inertie n'agit pas sur le mobile : c'est une force qui n'existe pas. Elle est introduite en Mécanique pour faciliter l'énoncé de certains théorèmes. On peut dire qu'elle joue en Mécanique le même rôle que les artifices de calcul en Analyse.

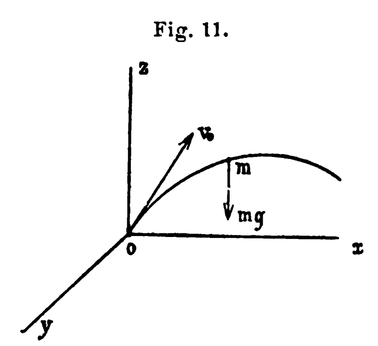
CHAPITRE V.

Mouvement des projectiles dans le vide.

54. Problème. — *Un point matériel pesant est lancé suivant une direction donnée avec une vitesse donnée* v_0 *; il se meut ensuite sous la seule action de la pesanteur supposée constante en grandeur et en direction. On demande de trouver le mouvement de ce point.* (C'est le mouvement d'un projectile dans le vide.)

Prenons le point de départ O pour origine de trois axes rectangulaires, l'axe des z étant dirigé en sens contraire du sens dans lequel agit la pesanteur (fig. 11). Soit m la masse du point matériel ; la force constante qui agit sur le mobile est égale à mg, et dirigée dans le sens des z négatifs.

Fig. 11.



Les équations différentielles du mouvement sont, en supprimant le facteur m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g; \qquad (1)$$

on en tire, en intégrant :

$$\frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = c', \quad \frac{dz}{dt} = c'' - gt. \qquad (2)$$

Donc, *le mouvement projeté sur les axes des x et des y est uniforme; sur l'axe des z le mouvemen projeté est uniformément retardé.*

Si nous désignons par α, β, γ les angles que la direction de la vitesse initiale v_0 fait avec les axes, les composantes de cette vitesse sont $v_0 \cos \alpha$, $v_0 \cos \beta$, $v_0 \cos \gamma$. Or, si dans les équations (2) on fait $t = 0$, il vient :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = c, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = c', \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = c'' ;$$

mais, d'autre part :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \beta, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \gamma,$$

par conséquent,

$$c = v_0 \cos \alpha, \quad c' = v_0 \cos \beta, \quad c'' = v_0 \cos \gamma,$$

et les équations (2) deviennent :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \beta, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \cos \gamma - gt; \qquad (3)$$

d'où, en intégrant de nouveau :

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \cos \beta, \quad z = v_0 t \cos \gamma - \tfrac{1}{2} g t^2. \qquad (4)$$

Nous n'ajoutons pas de constantes, puisque l'on doit avoir $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, pour $t = 0$.

Les équations (4) sont les ***intégrales finies*** des équations du mouvement (1) ; les équations (3) sont les ***intégrales premières***.

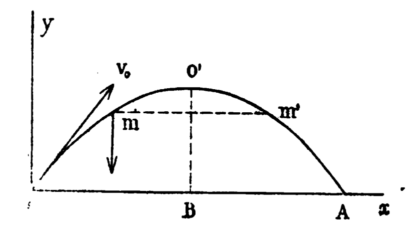
Des deux premières équations (4) on tire :

$$\frac{y}{x} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha};$$

donc, ***la projection de la trajectoire sur le plan des xy est une ligne droite, et, par conséquent, cette trajectoire est une courbe plane.***

55. Rapportons donc la trajectoire à deux axes rectangulaires pris dans son plan, l'axe des y étant

Fig. 12.



dirigé en sens contraire du sens dans lequel agit la pesanteur (fig. 12). Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g; \qquad (5)$$

on en tire, en désignant par α l'angle que la direction de la vitesse initiale v_0 fait avec l'horizontale :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt, \tag{6}$$

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{7}$$

On conclut de là que *la projection horizontale de la vitesse du mobile à un instant quelconque est une quantité constante.*

En éliminant t entre les équations (7) on trouve pour l'équation de la trajectoire :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Donc, *le mobile décrit une parabole du second degré dont l'axe est vertical, et qui est tangente au point* O *à la direction de la vitesse initiale*, puisque, pour $t = 0$, on a :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Si l'on pose $v_0^2 = 2gh$, il vient pour l'équation de la trajectoire :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha}. \tag{8}$$

56. Étudions maintenant les propriétés du mouvement.

Élevant au carré les équations (6), et ajoutant, on a :

$$v^2 = v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha, \tag{9}$$

ou bien, en éliminant t au moyen de la deuxième équation (7) :

$$v^2 = v_0^2 - 2gy. \qquad (10)$$

Cette formule détermine *la vitesse en un point quelconque de la trajectoire.*

Pour déterminer l'*amplitude du tir*, ou la *portée du jet*, faisons $y = 0$ dans l'équation (8), il viendra :

$$0 = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha},$$

d'où l'on tire :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \text{OA} = 4h \sin \alpha \cos \alpha = 2h \sin 2\alpha.$$

Il résulte de cette formule que l'*amplitude* est *maximum* pour une même vitesse initiale v_0, lorsque l'on a $\alpha = 45°$, et il vient alors :

$$\text{OA} = 2h.$$

Propriété. — *Pour des directions qui s'écartent également de la direction de* 45°, *les amplitudes sont égales.*

En effet, soient deux directions faisant des angles θ de part et d'autre de la direction de 45° ; nous aurons pour ces deux directions :

$$\alpha = 45° \pm \theta,$$

or,

$$\sin 2\,(45° \pm \theta) = \cos 2\theta,$$

et, par suite, pour ces deux directions, on a :

$$\text{OA} = 2h \cos 2\theta.$$

57. Pour déterminer le *sommet* O' de la parabole, c'est-à-dire le point correspondant à la plus grande hauteur à laquelle le mobile s'élèvera, nous aurons à chercher le maximum de y, c'est-à-dire le point pour lequel on a $\frac{dy}{dx} = 0$. On a donc l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{x}{2h \cos^2 \alpha} = 0,$$

d'où l'on tire :

$$x = 2h \sin \alpha \cos \alpha = h \sin 2\alpha ;$$

donc, l'*abscisse du sommet est égale à la moitié de l'amplitude.*

Pour déterminer la *hauteur du jet*, remplaçons x par sa valeur dans l'équation (8), nous aurons :

$$y = h \sin^2 \alpha ;$$

cette hauteur est elle-même un *maximum* pour $\alpha = 90°$, et l'on a alors :

$$y = h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Elle est, comme on voit, égale à la moitié de l'amplitude maximum du tir.

Si l'on rapporte la trajectoire à son sommet O', en faisant dans l'équation (8) :

$$x = 2h \sin \alpha \cos \alpha + x',$$

$$y = h \sin^2 \alpha - y',$$

on trouvera pour l'équation de la trajectoire :

$$x'^2 = 4h \cos^2 \alpha \, . \, y'.$$

Le *paramètre* de la courbe est donc $4h \cos^2 \alpha$.

Fig. 13.

Il s'ensuit que, F étant le foyer, on a (fig. 13) :

$$O'F = h \cos^2 \alpha \, ;$$

si l'on prend :

$$O'G = O'F = h \cos^2 \alpha,$$

et si l'on mène par le point G une parallèle à l'axe des x, on aura la *directrice* HG.

La distance de la directrice à l'axe des x est donc :

$$OH = BG = O'B + O'G = h.$$

58. Problème. — *Connaissant la hauteur h due à la vitesse initiale v_0, et la direction de cette vitesse, construire la trajectoire.*

Prenons sur Oy (fig. 14) une longueur OH $= h$; par le point H menons une perpendiculaire HD à v_0, et par le point D une perpendiculaire DE à l'axe Oy. Prolongeons ED d'une longueur DO' $=$ DE : le point O' sera le sommet de la parabole. On a, en effet,

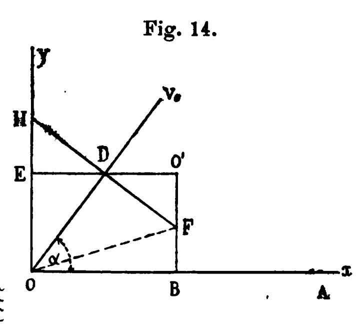


Fig. 14.

$$OD = h \sin \alpha,$$

$$ED = OD \cos \alpha = h \sin \alpha \cos \alpha ;$$

donc,

$$EO' = 2h \sin \alpha \cos \alpha.$$

On obtient le foyer en prolongeant HD jusqu'à la rencontre avec la perpendiculaire O'B à l'axe des x : en effet, on a :

$$DF = HD = h \cos \alpha,$$

$$O'F = DF \cos \alpha = h \cos^2 \alpha.$$

Enfin, $OA = 2OB$ sera l'amplitude du tir.

59. Remarque I. — Si, dans la formule (10) qui donne la vitesse en un point quelconque de la trajectoire, on fait $y = 0$, on trouve pour la vitesse au point A :

$$v = v_0.$$

Donc, *le mobile repasse par l'horizontale avec sa vitesse initiale.*

Remarque II. — De cette même formule (10) on conclut encore que la *vitesse sera minimum*, lorsque y est maximum, c'est-à-dire au point O'. Pour trouver cette vitesse minimum, il suffit de faire $y = h \sin^2 \alpha$ dans la formule (10), et il vient :

$$v^2 = v^2_0 - 2gh \sin^2 \alpha = v_0{}^2 - v_0{}^2 \sin^2 \alpha = v_0{}^2 \cos^2 \alpha,$$

d'où :

$$v = v_0 \cos \alpha.$$

Donc, *la vitesse au point* O', *c'est-à-dire la vitesse minimum, est égale à la projection horizontale de la vitesse initiale* v_0.

Propriété. — *En deux points m et m'* (fig. 12) *également distants du sommet* O', *ou à des hauteurs égales au-dessus de l'horizontale, les vitesses sont égales.*

Cela résulte évidemment de la formule (10).

60. Proposons-nous encore de *trouver le temps employé par le mobile pour aller de* O *en* O'. Il suffit pour cela de faire $v = v_0 \cos \alpha$ dans la formule (9), ce qui nous donne :

$$v_0^2 \cos^2 \alpha = v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0gt \sin \alpha,$$

ou bien :

$$v_0^2 \sin^2 \alpha + g^2t^2 - 2v_0 gt \sin \alpha = 0,$$

ou bien encore :

$$v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

d'où :

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}.$$

61. Considérons maintenant *des projectiles lancés dans un même plan vertical avec une même vitesse initiale dans des directions différentes à partir d'un même point* O.

Chacun de ces projectiles décrira une parabole : toutes ces paraboles seront situées dans un même plan

vertical, et elles seront représentées par l'équation (8) dans laquelle on fera varier l'angle α pour passer de l'une à l'autre.

Or, il résulte des formules précédentes (n° **57**) que la distance OH de la directrice à l'horizontale est indépendante de α. On en conclut que, *pour toutes les inclinaisons possibles, et pour une même vitesse initiale v_0, les trajectoires auront la même directrice.*

D'ailleurs, le point O étant un point de la courbe, on a :

$$OF = OH = h.$$

Par conséquent, les *foyers de toutes les paraboles sont sur une même circonférence* décrite du point O comme centre avec $OH = h$ pour rayon.

Proposons-nous de *trouver le lieu des sommets de toutes les paraboles correspondant aux différentes valeurs de α.*

Les coordonnées du sommet O′ d'une parabole sont données par les formules :

$$x_1 = 2h \sin\alpha \cos\alpha,$$

$$y_1 = h \sin^2\alpha.$$

Pour obtenir le lieu des sommets, nous devons éliminer α entre ces deux équations, ce qui nous donne l'équation :

$$x_1^2 + 4y_1^2 - 4hy_1 = 0.$$

Le lieu est donc une *ellipse* dont le centre est sur l'axe des y, au milieu de la hauteur $OH = h$ due à la vitesse v_0.

Proposons-nous encore de ***trouver l'enveloppe de toutes les paraboles représentées par l'équation*** (8) dans laquelle α sera considéré comme un paramètre variable. Il suffit pour cela d'éliminer α entre cette équation (8) et l'équation $\frac{dy}{d\alpha} = 0$, qui nous donne :

$$0 = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{x^2 \sin \alpha}{2h \cos^3 \alpha};$$

de cette dernière on tire :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{x},$$

d'où, en substituant dans (8), on trouve pour l'équation de l'enveloppe :

$$x^2 = 4h(h - y).$$

L'enveloppe est donc une ***parabole*** dont l'axe est dirigé suivant l'axe des y. Le sommet de cette parabole est au point H : en effet, en faisant $x = 0$, on trouve pour l'ordonnée du sommet $y = h =$ OH. D'ailleurs, en faisant $y = 0$, on trouve $x = 2h = 2$OH pour l'intersection de la courbe avec l'horizontale ; par suite, le foyer est au point O.

62. — PROBLÈME. — *Trouver sous quel angle il faut lancer un projectile du point* O, *pour qu'il atteigne un point donné.*

Soient X, Y les coordonnées du point donné, α l'angle inconnu. Posons :

$$\operatorname{tg} \alpha = u, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + u^2.$$

L'équation (8) nous donne :

$$Y = Xu - \frac{X^2(1+u^2)}{4h},$$

d'où l'on tire :

$$u = \frac{2h}{X} \pm \frac{1}{X}\sqrt{4h^2 - 4hY - X^2}.$$

Il résulte de là que, si l'on a :

$$4h^2 - 4hY - X^2 > 0,$$

on aura deux valeurs réelles de u, et ces deux valeurs sont positives, lorsque X est positif. Par conséquent, dans ce cas, le mobile pourra être lancé dans deux directions différentes pour atteindre le but.

Si l'on a :

$$4h^2 - 4hY - X^2 = 0,$$

il n'existe qu'une seule direction déterminée par la formule :

$$u = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{X}.$$

Enfin, le problème est impossible, lorsque l'on a :

$$4h^2 - 4hY - X^2 < 0.$$

Or, si l'on considère la courbe représentée par l'équation :

$$4h^2 - 4hy - x^2 = 0,$$

ou bien :

$$x^2 = 4h(h - y),$$

cette courbe n'est autre que la parabole enveloppe trouvée précédemment. Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent alors s'énoncer de la manière suivante : Quand le point que l'on veut atteindre est situé à l'intérieur de la parabole enveloppe, le mobile peut être lancé dans deux directions différentes; si le point est sur cette parabole, il n'y a qu'une seule direction ; enfin, si le point est extérieur à la parabole, le problème est impossible. Cette parabole s'appelle *parabole de sûreté*.

REMARQUE. — Il est évident que, si l'on fait tourner le plan autour de l'axe Oy, la parabole enveloppe engendrera un paraboloïde de révolution, et cette surface jouira dans l'espace des mêmes propriétés que la parabole de sûreté dans le plan yOx.

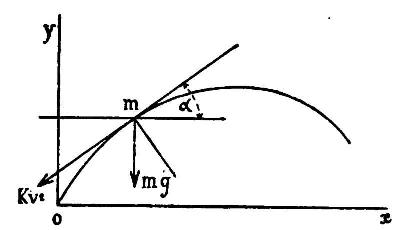
Mouvement des projectiles dans l'air.

63. PROBLÈME. — *Un point matériel pesant est lancé dans un milieu résistant avec une vitesse donnée. Trouver le mouvement de ce point.*

Ce point décrit une trajectoire qui, en général, est comprise dans le plan vertical passant par la direction de la vitesse initiale. Les forces qui sollicitent le mobile à un instant quelconque sont la pesanteur et la résistance du milieu. Nous supposerons cette résistance proportionnelle au carré de la vitesse ;

elle sera dirigée suivant la tangente à la trajectoire, en sens contraire du mouvement (fig. 15). Nous la représenterons par kv^2, en la rapportant à l'unité de masse, v étant la vitesse du point m à la fin

Fig. 15.



du temps t. Cette résistance se décompose en deux forces : une horizontale, dirigée vers les x négatifs, et une verticale dirigée dans le sens de la pesanteur, ou des y négatifs, quand le mobile montera, et en sens contraire quand le mobile descendra.

Si l'on désigne par α l'angle que la vitesse v fait avec l'axe des x, les composantes de la résistance seront :

$$-kv^2 \cos \alpha, \quad -kv^2 \sin \alpha,$$

et les équations différentielles du mouvement seront :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kv^2 \cos \alpha,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - kv^2 \sin \alpha.$$

64. Pour simplifier les calculs, on peut, au lieu de prendre les composantes de l'accélération suivant deux axes rectangulaires Ox et Oy, prendre ces

composantes suivant deux autres droites, savoir : l'axe des x et la normale à la trajectoire. Nous aurons ainsi deux équations du mouvement qui pourront remplacer les deux précédentes. Or, les composantes des forces sont :

1° Suivant l'axe des x : $-kv^2 \cos \alpha$;

2° Suivant la normale, dirigée du point considéré vers le centre de courbure : $g \cos \alpha$, puisque la composante de la résistance kv^2 suivant la normale est nulle. D'ailleurs, la composante de l'accélération totale suivant la normale est $\frac{v^2}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la trajectoire.

Les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kv^2 \cos \alpha, \tag{1}$$

$$\frac{v^2}{\rho} = g \cos \alpha. \tag{2}$$

Si l'on observe que l'angle α diminue quand s augmente, nous aurons :

$$ds = -\rho d\alpha,$$

d'où :

$$\rho = -\frac{ds}{d\alpha};$$

l'équation (2) devient alors :

$$g \cos \alpha = -\frac{v^2 d\alpha}{ds}. \tag{3}$$

Les équations (1) et (3) sont les *équations du mouvement*.

65. L'équation (1) peut être mise sous la forme suivante, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par $v \cos \alpha$:

$$\frac{d\,(v \cos \alpha)}{dt} = - kv^2 \cos \alpha,$$

d'où :

$$\frac{d\,(v \cos \alpha)}{v \cos a} = - kvdt = - kds\,;$$

en intégrant, il vient :

$$l\,.\,v \cos \alpha = - ks + c.$$

Pour déterminer la constante nous ferons $t = 0$, et nous aurons, en désignant par v_0 la vitesse initiale et par θ l'angle qu'elle fait avec l'axe des x :

$$l\,.\,v_0 \cos \theta = c;$$

par suite,

$$l\,.\,v \cos \alpha = - ks + l\,.\,v_0 \cos \theta,$$

d'où :

$$l\,.\,\frac{v \cos \alpha}{v_0 \cos \theta} = - ks,$$

ou bien :

$$\frac{v \cos \alpha}{v_0 \cos \theta} = e^{-ks},$$

et enfin :

$$v = \frac{v_0 \cos \theta}{\cos \alpha} e^{-ks}.$$

Remplaçant v par sa valeur dans l'équation (3) on a :

$$g \cos \alpha = -\frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \alpha} e^{-2ks} \cdot \frac{d\alpha}{ds},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} e^{2ks} ds. \qquad (4)$$

Cette dernière équation ne renfermant que α et s, est celle de la *trajectoire.*

Si l'on pose :

$$\operatorname{tg} \alpha = p,$$

l'équation (4) nous donne :

$$dp \sqrt{1 + p^2} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} e^{2ks} ds, \qquad (5)$$

d'où, en intégrant,

$$p \sqrt{1+p^2} + l.(p + \sqrt{1 + p^2}) = \gamma - \frac{g}{kv_0^2 \cos^2 \theta} e^{2ks}. \quad (6)$$

On détermine la constante γ en faisant $s = 0$, d'où $p = \operatorname{tg} \theta$, et il vient :

$$\gamma = \operatorname{tg} \theta \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} + l.(\operatorname{tg} \theta + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}) + \frac{g}{kv_0^2 \cos^2 \theta}.$$

Nous conserverons, pour plus de facilité, la constante γ dans nos formules.

66. L'équation (6) nous donne s en fonction de p ; mais, pour construire la courbe, il est préférable de déterminer x et y en fonction de p.

Or, de la formule :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha,$$

on tire :

$$dx = ds \,.\, \cos \alpha = \frac{ds}{\sqrt{1 + p^2}},$$

d'où, en remplaçant ds par sa valeur (5) :

$$dx = -\frac{v_0{}^2 \cos^2 \theta}{g} e^{-2ks} dp,$$

ou bien, en éliminant e^{-2ks} au moyen de l'équation (6),

$$dx = \frac{1}{k} \frac{dp}{p\sqrt{1 + p^2} + l.(p + \sqrt{1 + p^2}) - \gamma}, \qquad (7)$$

et, en vertu de la formule :

$$dy = pdx,$$

on a aussi :

$$dy = \frac{1}{k} \frac{pdp}{p\sqrt{1 + p^2} + l.(p + \sqrt{1 + p^2}) - \gamma}. \qquad (8)$$

Des équations (7) et (8) on tire, en intégrant les seconds membres par approximation :

$$x = f(p), \quad y = \mathrm{F}(p);$$

nous aurons donc x et y pour chaque valeur de p, ce qui nous donnera autant de points que l'on voudra de la trajectoire.

67. Proposons-nous de *déterminer le temps employé par le mobile pour aller du point* O *en un point m quelconque.*

A cet effet, nous déterminerons t en fonction de p. Or, la formule :

$$g \cos \alpha = \frac{v^2}{\rho},$$

nous donne :

$$g \cos \alpha = \frac{ds^2}{dt^2}\left(-\frac{d\alpha}{ds}\right) = -\frac{ds\,d\alpha}{dt^2},$$

d'où :

$$dt^2 = -\frac{ds\,d\alpha}{g \cos \alpha}. \tag{9}$$

Mais, de la formule (4) on tire :

$$ds = -\frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} \cdot \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g e^{2ks}},$$

et, par suite,

$$dt^2 = \frac{v_0^2 \cos^2 \theta}{g^2 e^{2ks}} \cdot \frac{d\alpha^2}{\cos^4 \alpha},$$

d'où, en extrayant la racine carrée des deux membres, et observant que dt et $d\alpha$ sont de signes contraires :

$$dt = -\frac{v_0 \cos\theta}{ge^{ks}} \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{v_0 \cos\theta}{ge^{ks}}\, dp.$$

Si l'on élimine l'exponentielle e^{ks} au moyen de l'équation (6), il vient :

$$dt = -\frac{1}{\sqrt{kg}} \frac{dp}{\sqrt{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - l.(p+\sqrt{1+p^2})}}. \quad (10)$$

Cette formule dont le second membre peut être intégré par approximation nous donnera t en fonction de p.

68. *La vitesse au point m* est donnée par la formule :

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{g}{k} \frac{1 + p^2}{\gamma - p\sqrt{1+p^2} - l.(p+\sqrt{1+p^2})}. \quad (11)$$

On obtiendra *le sommet de la courbe* en faisant $p = 0$ dans les expressions de x et y. On obtient *l'amplitude du tir*, en faisant $y = 0$.

69. PROPRIÉTÉ. — Il est facile de s'assurer que *le point où la vitesse est minimum est situé sur la branche descendante.*

Pour le démontrer, reprenons la formule (n° **65**) :

$$v = \frac{v_0 \cos\theta}{\cos\alpha} e^{-ks}.$$

Pour le point où la vitesse est minimum, on doit avoir :

$$\frac{dv}{dt} = 0;$$

or, on a :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{\cos\alpha} v_0 \cos\theta \, e^{-ks} \frac{ds}{dt} + \frac{v_0 \cos\theta}{\cos^2\alpha} \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} e^{-ks}$$

$$= -\frac{k}{\cos\alpha} v_0 \cos\theta \, e^{-ks} . v - \frac{v_0 \cos\theta}{\cos^2\alpha} \sin\alpha \frac{g \cos\alpha}{v} e^{-ks},$$

en remplaçant $\frac{d\alpha}{dt}$ par sa valeur tirée de l'équation (9) :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g \cos\alpha}{v}.$$

L'équation $\frac{dv}{dt} = 0$, nous donne donc :

$$-kv - \frac{g}{v} \sin\alpha = 0,$$

ou bien :

$$kv^2 + g \sin\alpha = 0,$$

d'où l'on tire :

$$g \sin\alpha = -kv^2.$$

Donc, *au point où la vitesse est minimum, la composante tangentielle de la pesanteur est égale à la résistance* kv^2.

Ce point est sur la branche descendante ; car on a, pour ce point :

$$p = \operatorname{tg} \alpha = - \frac{kv^2}{\sqrt{g^2 - k^2 v^4}};$$

la valeur de $\operatorname{tg} \alpha$ étant négative, la propriété est démontrée.

70. Propriété. — *La branche descendante de la trajectoire est indéfinie, et elle a une asymptote verticale.*

Il est d'abord facile de voir que p augmente indéfiniment.

En effet, pour la branche descendante p est négatif : donc, en remplaçant p par $-q$, q étant positif, dans la formule (10), on a :

$$dt = \frac{1}{\sqrt{kg}} \frac{dq}{\sqrt{\gamma + q\sqrt{1+q^2} - l.(-q + \sqrt{1+q^2})}}.$$

Or, le dénominateur du second membre de cette équation est composé de termes positifs. En effet, on a identiquement :

$$(\sqrt{1+q^2} - q)(\sqrt{1+q^2} + q) = 1,$$

d'où :

$$l.(\sqrt{1+q^2} - q) = -l.(\sqrt{1+q^2} + q).$$

Par conséquent :

$$dt = \frac{1}{\sqrt{kg}} \frac{dq}{\sqrt{\gamma + q\sqrt{1+q^2} + l.(q + \sqrt{1+q^2})}}.$$

Le dénominateur ne peut donc être nul pour aucune valeur de q, c'est-à-dire pour aucune valeur de p. Donc, si p était limité, l'intégrale de l'équation (10) ne pourrait croître indéfiniment (puisque le dénominateur ne peut pas être nul, et que le numérateur a une valeur finie) ; par suite, le temps aurait une limite, ce qui est absurde. Donc, *la tangente à la trajectoire tend indéfiniment à devenir verticale.*

Remplaçons aussi p par $-q$ dans les valeurs (7) et (8) de dx et de dy, et observons que, lorsque q sera très grand, on peut remplacer $\sqrt{1+q^2}$ par q, et négliger γ et $l(-q+\sqrt{1+q^2})$ par rapport à q ; nous aurons alors :

$$dx = \frac{1}{k}\frac{dq}{q^2}, \quad dy = -\frac{1}{k}\frac{dq}{q};$$

d'où :

$$x = c - \frac{1}{kq}, \quad y = c' - \frac{1}{k} l . q.$$

Or, quand q tend vers l'infini, x converge vers une valeur constante, et la valeur négative de y croît indéfiniment ; ce qui démontre la propriété énoncée.

Observons cependant que la valeur trouvée pour x n'est pas précisément l'abscisse de l'asymptote, puisque

nous avons négligé certains termes. Pour obtenir cette abscisse, il faudrait intégrer la valeur complète de dx jusqu'à $q = \infty$.

71. PROPRIÉTÉ. — *La vitesse converge vers une valeur constante.* En effet, en remplaçant p par $-q$, dans la formule (11), et passant à la limite, on a :

$$\lim v^2 = \frac{g}{k} \lim \frac{1+q^2}{q^2} = \frac{g}{k}.$$

Il en résulte que *la vitesse tend indéfiniment vers la valeur qui rendrait la résistance kv^2 égale au poids du mobile, et le mouvement s'approche de plus en plus de l'uniformité.*

72. CAS PARTICULIER. — Examinons le cas où l'angle θ du tir est très petit ; dans ce cas, le point ne s'élève qu'à une très faible hauteur au-dessus de l'axe des x, et la tangente étant très peu inclinée sur l'axe des x, on pourra négliger p^2. La formule :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

nous donne alors :

$$ds = dx, \quad \text{d'où} \quad s = x.$$

L'équation (5) se réduit à la suivante :

$$dp = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta} e^{2kx} dx,$$

d'où :

$$p = c - \frac{g}{2kv_0^2 \cos^2 \theta} e^{2kx};$$

pour déterminer la constante, faisons $x = 0$, $p = \operatorname{tg} \theta$, et nous aurons :

$$c = \operatorname{tg} \theta + \frac{g}{2kv_0^2 \cos^2 \theta},$$

par suite,

$$p = \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{2kv_0^2 \cos^2 \theta} \left(e^{2kx} - 1\right) = \frac{dy}{dx}.$$

En intégrant, il vient :

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{g}{2kv_0^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{1}{2k} e^{2kx} - x\right) + c';$$

or, pour $x = 0$, on a : $y = 0$, et par conséquent,

$$c' = \frac{g}{4k^2 v_0^2 \cos^2 \theta}.$$

Nous aurons donc pour l'équation de la trajectoire :

$$y = x \left(\operatorname{tg} \theta + \frac{g}{2kv_0^2 \cos^2 \theta}\right) - \frac{g}{4k^2 v_0^2 \cos^2 \theta} \left(e^{2kx} - 1\right).$$

Enfin, l'équation (n° **65**) :

$$v \cos \alpha = v_0 \cos \theta \, e^{-ks},$$

nous donne, dans le cas actuel,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta \, e^{-kx} ;$$

d'où :

$$dt = \frac{1}{v_0 \cos\theta} e^{kx} \, dx,$$

et, en intégrant,

$$t = \frac{1}{kv_0 \cos\theta} \left(e^{kx} - 1 \right).$$

CHAPITRE VI.

Mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe.

73. PROBLÈME. — *Un point matériel de masse m, sollicité par une force donnée P, est assujetti à se mouvoir sur une courbe fixe, dont on néglige le frottement. Trouver le mouvement de ce point.*

Soient :

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, \\ f(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

les équations de la courbe. Nous pourrons rendre le point *libre*, et, par conséquent, appliquer les équations différentielles du mouvement d'un point libre (n° **13**), en joignant à la force motrice P, la réaction normale de la courbe.

Soient X, Y, Z les composantes de la force P, N la réaction normale de la courbe, située dans le plan normal, λ, μ, ν les angles qu'elle fait avec les axes, x, y, z les coordonnées du point m à la fin du temps t.

Les équations différentielles du mouvement sont :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu, \qquad (2)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu.$$

D'ailleurs, la réaction normale étant perpendiculaire à la direction de la vitesse, c'est-à-dire de la tangente, nous aurons :

$$\cos\lambda\, dx + \cos\mu\, dy + \cos\nu\, dz = 0\,; \qquad (3)$$

on a, en outre,

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1. \qquad (4)$$

Nous avons ainsi sept équations pour déterminer les sept inconnues x, y, z, λ, μ, ν, N en fonction du temps t, c'est-à-dire la position du mobile à chaque instant, ainsi que la grandeur et la direction de la *pression*, laquelle est égale et directement opposée à la réaction normale. Mais, dans la plupart des cas, les calculs sont impraticables.

Avant d'exposer la marche ordinaire des opérations, nous allons étudier quelques *propriétés communes à tous les mouvements sur une courbe.*

74. Multiplions les équations (2) respectivement par dx, dy, dz, et ajoutons ; nous aurons, en ayant égard à l'équation (3) :

$$m\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = X dx + Y dy + Z dz,$$

ou bien :

$$mv\,dv = Xdx + Ydy + Zdz.$$

En intégrant, il vient :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = C + \int (Xdx + Ydy + Zdz), \qquad (5)$$

équation que l'on peut écrire sous la forme suivante, en désignant par v_0 la vitesse initiale :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^t (Xdx + Ydy + Zdz), \qquad (6)$$

ou bien :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^t P ds \cos\theta = \int_0^t T ds, \qquad (7)$$

θ étant l'angle que la force motrice P fait avec la tangente à la courbe, et T la composante tangentielle de cette force.

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La variation de force vive entre deux positions du mobile est égale au double du travail de la force motrice, ou de la composante tangentielle de cette force.*

75. PROPRIÉTÉS. — L'équation (6) nous permet de déterminer la vitesse du mobile à un instant quelconque du mouvement. Elle nous apprend que *cette vitesse est indépendante de la réaction normale, et ne dépend que de la force motrice.*

De cette même équation (6) il résulte que *la force vive est constante*, et, par suite, que *la vitesse v est constante, lorsque la force motrice est constamment nulle*, ou *lorsqu'elle est constamment normale à la courbe*. Car, dans ces deux cas, on a :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Donc, dans ces deux cas, *le mouvement est uniforme*.

L'équation (7) nous apprend que, chaque fois que le mobile passera par un point pour lequel $\theta = 90°$, la vitesse sera un maximum ou un minimum. Car, on a, pour ces positions :

$$mv\,dv = 0,$$

ou bien :

$$dv = 0.$$

76. S'il existe une *fonction de force*, c'est-à-dire si le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, *considérées comme variables indépendantes*, en d'autres termes, si l'on a :

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\,.\,\varphi\,(x, y, z),$$

l'équation (5) nous donne :

$$mv^2 = 2\varphi\,(x, y, z) + C,$$

ou bien :

$$mv^2 - mv_0^2 = 2\varphi\,(x, y, z) - 2\varphi\,(x_0, y_0, z_0).$$

On voit que, dans ce cas, *la vitesse s'obtient sans faire usage des équations de la courbe* : elle est exprimée en fonction de x, y, z, x_0, y_0, z_0, c'est-à-dire en fonction des coordonnées du point d'arrivée et du point de départ. Elle reprendra la même valeur toutes les fois que le mobile reviendra au même point, ou toutes les fois que le mobile atteindra la surface :

$$\varphi(x, y, z) = const.,$$

surface que l'on appelle *surface de niveau*. C'est le principe de la *conservation des forces vives*.

77. Revenons maintenant à la solution du problème général.

Les équations (1) permettent de déterminer deux des variables x, y, z en fonction de la troisième. Il suffira donc de trouver une relation entre l'une de ces variables et le temps t. Or, dans la plupart des cas, cette relation sera donnée par le principe des forces vives. C'est ce qui arrivera lorsqu'il existe une *fonction de force*. L'intégrale des forces vives nous donne alors :

$$mv^2 = 2\varphi(x, y, z) + C,$$

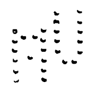
C étant une constante qui est déterminée par les circonstances initiales du mouvement.

En résolvant les équations (1) par rapport à x, y, il vient :

$$x = f_1(z), \quad y = f_2(z);$$

on a alors :

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{dz^2}{dt^2}\{1 + f_1'^2 + f_2'^2\}.$$



Par suite,

$$m \frac{dz^2}{dt^2} (1 + f_1'^2 + f_2'^2) = 2\varphi [f_1(z), f_2(z), z] + C,$$

d'où l'on tire :

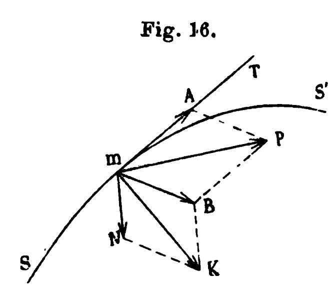
$$dt = \frac{\sqrt{m}\sqrt{1 + f_1'^2 + f_2'^2}}{\sqrt{2\varphi(f_1, f_2, z) + C}} dz = \psi(z)\, dz.$$

De cette équation on déduira t en fonction de z, et, par suite, z en fonction de t. L'intégration de cette équation introduira une nouvelle constante, que l'on détermine en faisant $t = 0$, $z = z_0$. Connaissant z en fonction de t, on déterminera facilement x et y en fonction de t.

78. Pression normale. — Lorsque le mouvement sera connu, on déterminera facilement la pression normale.

Soient m la position du mobile sur la courbe fixe SS' (fig. 16), mT la direction de la vitesse v, P la force appliquée au mobile, mN la réaction normale.

Fig. 16.



Sous l'action de la force P et de la force mN le point m peut être considéré comme libre ; par conséquent, la somme des projections de ces forces sur la tangente est égale à $m\frac{dv}{dt}$, et la somme des projections sur la normale principale est égale à $\frac{mv^2}{\rho}$.

Décomposons la force P en deux composantes, l'une $mA = P \cos\theta$, dirigée suivant la tangente, l'autre mB dirigée suivant la normale à la courbe dans le plan TmP de la force et de la tangente.

Cela posé, au lieu des forces P et N, nous pourrons considérer les forces mA, mB et mN ; donc, la somme des projections de ces trois forces sur la tangente est égale à $m\frac{dv}{dt}$, et la somme des projections sur la normale principale égale à $\frac{mv^2}{\rho}$. Or, les projections de mB et de la réaction mN sur la tangente étant nulles, il en résulte que la force $mA = P\cos\theta$ est la force qu'il faudrait communiquer suivant la tangente au point *m libre*, pour lui donner le mouvement qu'il possède. On a donc :

$$P \cos\theta = m\frac{dv}{dt}.$$

D'autre part, si nous menons la normale principale mK à la courbe, et si nous prenons sur cette droite une longueur $mK = \frac{mv^2}{\rho}$, dirigée vers le centre de courbure, cette force $\frac{mv^2}{\rho}$ sera la force qu'il faudrait appliquer au point *m libre*, suivant la normale principale, pour lui communiquer son mouvement effectif. Il en résulte donc que la réaction normale mN doit être telle que, composée avec mB, elle donne pour résultante mK. Par conséquent, $-mN$ sera la résultante de mB et de $-\frac{mv^2}{\rho}$.

Donc, *la pression normale est la résultante de la composante normale de la force motrice, et d'une*

force $\frac{mv^2}{\rho}$, *dirigée suivant le prolongement du rayon de courbure. Cette seconde force s'appelle force centrifuge.*

79. Remarque. — On peut d'ailleurs parvenir au même résultat de la manière suivante :

Des équations (2) on tire :

$$- N \cos \lambda = X - m \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$- N \cos \mu = Y - m \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$- N \cos \nu = Z - m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

On en conclut que la pression — N est la résultante de la force motrice P, et de la force d'inertie — F. Projetons ces deux forces sur la tangente à la trajectoire et sur le plan normal. Nous aurons pour la somme des projections de P et — F sur la tangente, l'expression

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} - m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{dz}{ds} \right).$$

Or, cette expression, qui n'est autre que $T - m \frac{dv}{dt}$, est nulle, en vertu des équations du mouvement (n° **74**).

Donc, *les composantes suivant la tangente de la force motrice et de la force d'inertie sont égales et de signes contraires.*

Par conséquent, — N sera la résultante des composantes de la force motrice et de la force d'inertie sur

le plan normal, et, si l'on désigne ces deux composantes par N_1 et N_2, il vient :

$$N^2 = N_1^2 + N_2^2 + 2N_1 N_2 \cos \varphi,$$

φ étant l'angle compris entre N_1 et N_2.

On peut obtenir l'expression de la force N_2 de la manière suivante :

On a évidemment :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d(v \cos \alpha)}{dt} = \cos \alpha \frac{dv}{dt} + v \frac{d \cos \alpha}{dt};$$

par suite,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} \frac{dx}{ds} + mv^2 \frac{d \cos \alpha}{ds}.$$

Or, si l'on désigne par ρ le rayon de courbure, et par λ_2, μ_2, ν_2 les angles qu'il fait avec les axes, on a :

$$\frac{d \cos \alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \cos \lambda_2;$$

par conséquent,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{T} \frac{dx}{ds} + \frac{mv^2}{\rho} \cos \lambda_2.$$

On a donc :

$$- \mathrm{N} \cos \lambda = \mathrm{X} - \mathrm{T} \frac{dx}{ds} - \frac{mv^2}{\rho} \cos \lambda_2.$$

Mais, $\mathrm{X} - \mathrm{T} \dfrac{dx}{ds}$ est évidemment la composante de N_1 sur l'axe des x: en effet, la force P est la

résultante de N_1 et de T, et, par suite, N_1 est la résultante de P et de — T; donc, en désignant par λ_1, μ_1, ν_1 les angles de N_1 avec les axes, on a :

$$X - T\frac{dx}{ds} = N_1 \cos \lambda_1.$$

D'ailleurs, N_1 est l'intersection avec le plan normal du plan mené par la tangente et la force motrice, et, par conséquent,

$$N_1 = P \sin \theta.$$

On a donc :

$$-N \cos \lambda = N_1 \cos \lambda_1 - \frac{mv^2}{\rho} \cos \lambda_2,$$

$$-N \cos \mu = N_1 \cos \mu_1 - \frac{mv^2}{\rho} \cos \mu_2,$$

$$-N \cos \nu = N_1 \cos \nu_1 - \frac{mv^2}{\rho} \cos \nu_2.$$

On conclut de là que la pression normale est la résultante de la force N_1 et de la force $N_2 = -\frac{mv^2}{\rho}$, c'est-à-dire de la composante de la force P dans le plan normal, et d'une force $\frac{mv^2}{\rho}$ dirigée suivant le prolongement du rayon de courbure.

Mouvement d'un point matériel sur une surface fixe.

80. Problème. — *Un point matériel de masse m, sollicité par une force donnée P, est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe, dont on néglige le frottement. Trouver le mouvement de ce point.*

Soit :

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

l'équation de la surface. Nous pourrons rendre le point *libre*, et, par conséquent, appliquer les équations différentielles du mouvement d'un point libre, en joignant à la force motrice P la réaction normale de la surface.

Soient X, Y, Z les composantes de la force P, N la réaction normale dirigée suivant la normale à la surface, λ, μ, ν les angles que cette normale fait avec les axes, x, y, z les coordonnées du point m à la fin du temps t.

Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + N\cos\lambda, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N\cos\mu, \qquad (2) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N\cos\nu. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs .

$$\cos \lambda = V \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos \mu = V \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos \nu = V \frac{\partial F}{\partial z},$$

et les équations du mouvement sont alors :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + NV \frac{\partial F}{\partial x},$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + NV \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad (3)$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + NV \frac{\partial F}{dz}.$$

Les équations (1) et (3), jointes aux conditions initiales, serviront à déterminer les inconnues x, y, z, N en fonction du temps.

Observons que le radical

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

doit être affecté du double signe $\pm$, ce double signe se rapportant aux deux directions opposées suivant lesquelles la réaction peut agir, l'une extérieure, l'autre intérieure.

Nous pouvons convenir de donner au radical le signe $+$; alors la réaction inconnue sera $\pm$ N, c'est-à-dire que nous donnerons un signe à N. *Le calcul fera connaître N non seulement en grandeur, mais en sens :* si elle est positive, elle correspondra à la partie de la normale définie par le signe $+$ du radical ; si elle est négative, elle correspondra à la partie opposée de cette normale.

81. Nous commencerons par l'étude de quelques *propriétés communes à tous les mouvements sur une surface.*

Multiplions les équations (3) respectivement par dx, dy, dz, et ajoutons ; nous aurons :

$$m\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz, \quad (4)$$

le coefficient de N étant nul, en vertu de la relation :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}dz = 0.$$

Cette équation (4) nous donne :

$$mv\,dv = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz,$$

d'où, en intégrant,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \mathrm{C} + \int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz), \quad (5)$$

ou bien, en désignant par v_0 la vitesse initiale :

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^t(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$$

$$= \int_0^t \mathrm{P}ds\cos\theta = \int_0^t \mathrm{T}ds. \quad (6)$$

Cette dernière équation nous donne le théorème suivant :

Théorème. — *La variation de force vive entre deux positions du mobile est égale au double du travail de la force motrice.*

L'équation (6) permet de déterminer la vitesse à un instant quelconque du mouvement. Elle nous apprend que *cette vitesse est indépendante de la réaction normale, et ne dépend que de la force motrice.*

82. S'il existe une *fonction de force*, on a :

$$\mathrm{X}dx + \mathrm{X}dy + \mathrm{Z}dz = d \,.\, \varphi\,(x, y, z),$$

et l'équation (5) nous donne :

$$mv^2 = 2\varphi\,(x, y, z) + \mathrm{C}, \qquad (7)$$

ou bien :

$$mv^2 - mv_0{}^2 = 2\varphi\,(x, y, z) - 2\varphi\,(x_0, y_0, z_0).$$

Nous pourrons alors considérer les *surfaces de niveau*, comme dans le cas d'un point libre. Nous trouverons que ces surfaces jouent, dans le cas d'un point assujetti à demeurer sur une surface, le même rôle que si le point était libre, et sollicité par la même force P.

83. Cas particuliers. — 1° Considérons le cas où *la force motrice est constamment nulle*, c'est-à-dire où le point matériel se meut sur une surface fixe en vertu d'une vitesse initiale.

Dans ce cas, l'équation (5) nous apprend que *la vitesse v est constante.*

Les équations du mouvement sont alors :

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{N} \cos \lambda,$$

$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{N} \cos \mu,$$

$$m\,\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{N} \cos \nu.$$

On en tire :

$$\frac{d^2x}{\cos\lambda} = \frac{d^2y}{\cos\mu} = \frac{d^2z}{\cos\nu}.$$

Par conséquent, *la normale à la surface coïncide en direction avec la normale principale à la trajectoire.* Il en résulte que la trajectoire est une *ligne géodésique* de la surface. C'est la ligne la plus courte que l'on puisse mener sur la surface entre deux quelconques de ses points (I, n° **374**).

Ainsi, *quand un point matériel, assujetti à demeurer sur une surface, se meut sur cette surface sans être soumis à l'action d'aucune force, il parcourt uniformément une ligne géodésique de la surface.*

2° Il est facile de voir que le mouvement est encore uniforme, dans le cas où *la force motrice est constamment normale à la surface :* car, on a aussi dans ce cas :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

et, par conséquent, la vitesse est constante.

84. Revenons maintenant à la solution du problème général.

En éliminant N entre les équations (3), on obtiendra deux équations qui, jointes à l'équation (1), déterminent x, y, z en fonction de t. Pour obtenir la trajectoire, il suffira d'éliminer t entre les deux équations résultant de l'élimination de N : on obtient ainsi une équation en x, y, z qui, jointe à l'équation (1), détermine la trajectoire.

Ces calculs, en général impraticables, se simplifient dans le cas où il existe une *fonction de force*, c'est-à-dire quand l'intégrale des forces vives existe.

En effet, on a alors :

$$mv^2 = 2\varphi(x, y, z) + C; \tag{7}$$

d'autre part, des équations (3) on tire, en multipliant la première par dy, la deuxième par dx, et retranchant :

$$m\left(\frac{d^2y}{dt^2}dx - \frac{d^2x}{dt^2}dy\right) = Ydx - Xdy + NV\left(\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy\right). \tag{8}$$

Or, on a identiquement :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

d'où :

$$d\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}dx - \frac{d^2x}{dt^2}dy}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2};$$

par conséquent,

$$\frac{d^2y}{dt^2}dx - \frac{d^2x}{dt^2}dy = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 d\frac{dy}{dx} = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\frac{dy}{dx}.$$

En substituant dans l'équation (8), il vient :

$$mv^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\frac{dy}{dx} = Ydx - Xdy + NV\left(\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy\right). \tag{9}$$

En combinant de la même manière les deux dernières équations (3), on a :

$$mv^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 d\frac{dz}{dy} = Zdy - Ydz + NV\left(\frac{\partial F}{\partial z}dy - \frac{\partial F}{\partial y}dz\right). \tag{10}$$

En éliminant N entre les équations (9) et (10), on obtient une équation qui ne renferme plus que les coordonnées x, y, z, et la force vive mv^2. Or, si l'on élimine la force vive au moyen de l'équation (7), on obtiendra une équation différentielle qui ne renferme que les coordonnées x, y, z, et qui, jointe à l'équation (1), déterminera la trajectoire.

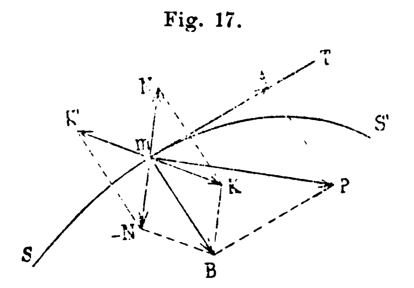
Cette méthode de calcul est due à Lagrange.

Remarque. — Dans le cas particulier où la force motrice est constamment nulle, la vitesse v est constante, et l'élimination de mv^2 et de N se fait en divisant membre à membre les équations (9) et (10). On a ainsi :

$$\frac{dx^2}{dy^2}\,\frac{d\,.\,\dfrac{dy}{dx}}{d\,\dfrac{dz}{dy}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\,dx - \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\,dy}{\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\,dy - \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\,dz}.$$

85. Pression normale. — Soient m la position du mobile à la fin du temps t (fig. 17), SS' la trajectoire inconnue, mT la tangente à la trajectoire suivant

Fig. 17.



la direction du mouvement. Décomposons la force P en deux composantes, l'une mA suivant la tangente à la trajectoire, l'autre mB perpendiculaire à la tangente dans le plan TmP de la force et de la tangente.

Soit mN la réaction inconnue de la surface, dirigée suivant la normale à cette surface. Il est évident que la résultante de mB et de mN doit être une force centripète mK dirigée suivant la normale principale à la trajectoire, et égale à $\frac{mv^2}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de cette trajectoire.

Donc, *la pression normale* — N *est la résultante de la composante de la force* P *suivant la normale à la trajectoire, et de la force centrifuge* $mK' = -\frac{mv^2}{\rho}$. Mais, dans le cas actuel, cette construction n'offre pas les mêmes avantages que dans le mouvement sur une courbe (n° **78**).

86. Remarque. — On peut obtenir la pression normale de la manière suivante :

Multiplions les équations (2) respectivement par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, et ajoutons, il viendra :

$$-N = (X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu)$$

$$-m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cos\lambda + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\mu + \frac{d^2z}{dt^2}\cos\nu\right).$$

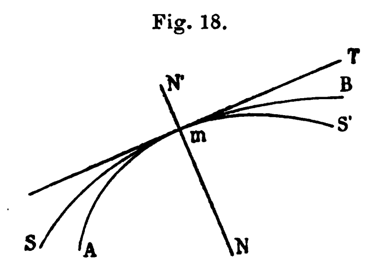
Comme on le voit, cette pression se compose de deux parties, la première :

$$X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu,$$

est la projection de la force motrice P sur la normale à la surface : nous la désignerons par P'; la seconde partie est la composante de la force d'inertie suivant la normale à la surface.

Cela posé, soit SS′ la trajectoire du point matériel sur la surface ; imaginons par la normale une section normale AB (fig. 18) ayant la même tangente mT que la trajectoire.

Fig. 18.



Soit ρ' le rayon de courbure de cette section normale : il sera dirigé suivant la normale à la surface. Les angles que ce rayon de courbure fait avec les axes sont donnés par les formules :

$$\cos \lambda = \pm \rho' \frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\cos \mu = \pm \rho' \frac{d^2y}{ds^2},$$

$$\cos \nu = \pm \rho' \frac{d^2z}{ds^2}.$$

Or, on a :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt},$$

d'où :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2} \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{dx}{ds} \frac{d^2s}{dt^2};$$

par suite,

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\cos\lambda+\frac{d^2y}{dt^2}\cos\mu+\frac{d^2z}{dt^2}\cos\nu\right)$$

$$=m\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cos\lambda+\frac{d^2y}{ds^2}\cos\mu+\frac{d^2z}{ds^2}\cos\nu\right)\frac{ds^2}{dt^2}$$

$$+m\left(\frac{dx}{ds}\cos\lambda+\frac{dy}{ds}\cos\mu+\frac{dz}{ds}\cos\nu\right)\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Or, la seconde partie du second membre est nulle, à cause de la relation :

$$\cos\lambda\,dx+\cos\mu\,dy+\cos\nu\,dz=0.$$

On a donc :

$$-\mathrm{N}=\mathrm{P}'-m\frac{ds^2}{dt^2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cos\lambda+\frac{d^2y}{ds^2}\cos\mu+\frac{d^2z}{ds^2}\cos\nu\right),$$

ou bien :

$$-\mathrm{N}=\mathrm{P}'\mp\frac{mv^2}{\rho'}.$$

Donc, *la pression normale se compose de la pression* P' *due à la force motrice, augmentée ou diminuée d'une autre pression qui ne dépend que de la vitesse et de la courbure de la surface dans le sens du mouvement.* Cette seconde pression est une véritable force centrifuge engendrée par le mouvement sur la surface. C'est cette force centrifuge qui distingue la pression dynamique de la pression statique.

87. On peut d'ailleurs donner à l'expression de cette seconde force une autre forme. En effet, si l'on désigne par ρ le rayon de courbure de la trajectoire SS' décrite par le point matériel, rayon de courbure que l'on pourra déterminer quand on connaîtra la trajectoire, par θ l'angle que fait le plan osculateur de cette courbe au point x, y, z, avec la normale à la surface (ou l'angle du rayon de courbure de la trajectoire avec la normale à la surface), nous aurons, par le théorème de Meunier :

$$\rho = \rho' \cos\theta\,;$$

par conséquent,

$$-\mathrm{N} = \mathrm{P}' \mp \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta.$$

Donc, *la pression sur la surface se compose de la pression due à la force motrice* (projection de P sur la normale à la surface), *augmentée ou diminuée de la force centrifuge* $\frac{mv^2}{\rho}$ *qui résulte du mouvement du point sur sa trajectoire, multipliée par le cosinus de l'angle du plan osculateur de la trajectoire avec la normale à la surface.*

88. REMARQUE. — Ce résultat est d'ailleurs évident, si l'on observe que les circonstances du mouvement seront les mêmes, si l'on supprime la surface, et si l'on assujettit le point à demeurer sur la courbe décrite. Or, le mouvement sur la courbe donne lieu à une force centrifuge $\frac{mv^2}{\rho}$, dirigée suivant le rayon de courbure de la trajectoire. Si l'on décompose cette force en deux : l'une normale à la surface $\frac{mv^2}{\rho}\cos\theta$, l'autre

tangentielle $\frac{mv^2}{\rho}\sin\theta$, la première seule déterminera sur la surface une pression qu'il faudra ajouter à la pression résultant de la force motrice.

89. La composante $\frac{mv^2}{\rho}\sin\theta$ donne lieu à une remarque importante : elle est située dans un plan passant par la normale à la surface et par le rayon de courbure de la trajectoire ; de plus, elle est perpendiculaire à la normale à la surface. Elle est donc dans le plan tangent, et perpendiculaire à la tangente en m à la trajectoire. Il résulte de là que les trois droites : la normale à la surface, la tangente à la trajectoire, et la direction de la seconde composante forment trois droites rectangulaires. Or, nous pouvons décomposer la force P en trois forces dirigées suivant ces trois droites, savoir :

1° une composante T suivant la tangente à la trajectoire : c'est cette composante qui produit le mouvement du point m suivant la tangente à la trajectoire ;

2° une composante P′ suivant la normale à la surface : c'est cette composante qui entre dans l'expression de la pression normale à la surface ;

3° une composante Q suivant la perpendiculaire aux deux précédentes.

Or, la composante T produit le mouvement sur la trajectoire ; les composantes P′ et $\frac{mv^2}{\rho}\cos\theta$ produisent la pression sur la surface. Les deux composantes Q et $\frac{mv^2}{\rho}\sin\theta$ ne produisent ni mouvement, ni pression ; elles doivent donc être égales, et nous aurons :

$$Q = \frac{mv^2}{\rho}\sin\theta.$$

Or, la composante Q est nulle :

1° lorsque le point matériel n'est sollicité par aucune force ;

2° lorsque la force motrice P est normale à la surface ;

3° lorsque la force motrice est dirigée suivant la tangente à la trajectoire : c'est ce qui arrive lorsque la force motrice provient du frottement, ou de la résistance de l'air ;

4° lorsque la force motrice est la résultante de T et de P' seulement, c'est-à-dire lorsqu'elle se compose d'une pression et d'une force tangentielle.

Dans tous ces cas, on a :

$$\frac{mv^2}{\rho} \sin \theta = 0 ;$$

d'où :

$$\sin \theta = 0, \quad \text{ou bien} \quad \theta = 0.$$

Donc, dans tous ces cas, la trajectoire est telle que l'angle du plan osculateur avec la normale à la surface est nul, c'est-à-dire que *le plan osculateur est normal à la surface*. La trajectoire est donc *une ligne géodésique*.

CHAPITRE VII.

Mouvement d'un point matériel pesant sur un cercle vertical.

90. PROBLÈME. — *Trouver le mouvement d'un point matériel pesant assujetti à demeurer sur un cercle vertical de rayon a.*

Prenons l'axe des x dans le plan du cercle, et tangent au point le plus bas, l'axe des z vertical et dirigé en sens inverse de la pesanteur.

Fig. 19.

L'équation du cercle est :

$$x^2 + z^2 - 2az = 0.$$

L'équation des forces vives nous donne (n° **49**) :

$$m(v^2 - v_0^2) = -2\int_0^t mg\,dz = -2mg\int_0^t dz\,;$$

d'où, en désignant par h la hauteur initiale NB (fig. 19) :

$$v^2 - v_0^2 = 2g(h - z). \qquad (1)$$

Or, on a :

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{a^2}{2az - z^2}\frac{dz^2}{dt^2};$$

par conséquent,

$$\frac{a^2}{2az - z^2}\frac{dz^2}{dt^2} = v_0^2 + 2gh - 2gz.$$

On tire de là :

$$dt = \mp \frac{adz}{\sqrt{(2az - z^2)(v_0^2 + 2gh - 2gz)}}. \qquad (2)$$

On prendra le signe — dans le second membre lorsque le mobile descendra, puisqu'alors z diminue quand t augmente, et, par conséquent, dz et dt sont de signes contraires ; on prendra le signe + lorsque le mobile montera.

Cette équation (2) est l'*équation différentielle du mouvement*.

91. Avant de nous occuper de cette équation, reprenons la formule (1) :

$$v^2 = v_0^2 + 2gh - 2gz,$$

qui donne la vitesse à un instant quelconque du mouvement.

On en conclut que *la vitesse* est *maximum* pour $z = 0$, c'est-à-dire au point le plus bas. On a alors :

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

La vitesse est nulle, lorsque l'on a :

$$v_0^2 + 2gh - 2gz = 0,$$

d'où l'on tire :

$$z = h + \frac{v_0^2}{2g},$$

pourvu que l'on ait :

$$h + \frac{v_0^2}{2g} < 2a,$$

puisque l'ordonnée z ne peut pas être plus grande que le diamètre du cercle. Dans ce cas, le mobile, parvenu à cette hauteur, redescendra ; sa vitesse deviendra nulle de l'autre côté pour la même valeur de z, et le *mouvement oscillatoire* se continuera indéfiniment.

Si, au contraire, on a :

$$h + \frac{v_0^2}{2g} > 2a,$$

la vitesse deviendra minimum au point le plus élevé du cercle, mais elle n'y sera pas nulle, et le *mouvement révolutif* aura lieu constamment dans le même sens. Les deux mouvements précédents sont *périodiques*.

Enfin, si l'on a :

$$h + \frac{v_0^2}{2g} = 2a,$$

la vitesse serait nulle au point le plus élevé du cercle, et le mobile y serait en équilibre, s'il pouvait y parvenir. Ce *mouvement* est appelé *apériodique*. Mais nous allons voir que le mobile tend vers cette position limite, sans jamais pouvoir l'atteindre.

92. Examinons donc ce cas particulier, le seul où l'équation (2) puisse être intégrée sous forme finie. Nous aurons alors, en introduisant cette condition dans l'équation (2) :

$$dt = \mp \frac{adz}{\sqrt{2az - z^2}\sqrt{4ag - 2gz}} = \mp \frac{adz}{\sqrt{2g}\,(2a - z)\sqrt{z}}.$$

Pour intégrer cette expression, observons que $\frac{dz}{2\sqrt{z}}$ est la différentielle de $\sqrt{z}$; d'autre part, on peut décomposer la fraction $\frac{1}{2a - z}$ de la manière suivante :

$$\frac{1}{2a - z} = \frac{1}{2\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{\sqrt{2a} + \sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}}\right).$$

Nous aurons donc, pour *le mouvement descendant :*

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{\frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a} + \sqrt{z}} + \frac{\frac{dz}{2\sqrt{z}}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}}\right\};$$

d'où, en intégrant,

$$t = C - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,l.\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{z}}{\sqrt{2a} - \sqrt{z}}.$$

Pour déterminer la constante, faisons $t = 0$, ce qui nous donne $z = h$, et nous aurons :

$$C = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\,l.\frac{\sqrt{2a} + \sqrt{h}}{\sqrt{2a} - \sqrt{h}};$$

on a donc :

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, l.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, l.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}.$$

Lorsque le mobile arrive au point le plus bas, on a $z = 0$; par suite :

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, l.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}.$$

C'est *le temps employé par le mobile pour aller du point* A *au point* B.

A partir de cet instant, $\frac{dz}{dt}$ devient positif; il faudra changer le signe du premier terme de la valeur de t, et nous aurons pour le mouvement ascendant :

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, l.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{z}}{\sqrt{2a}-\sqrt{z}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\, l.\frac{\sqrt{2a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2a}-\sqrt{h}}.$$

A mesure que t augmente, z augmente ; mais, il est toujours plus petit que $2a$. En effet, pour $z = 2a$, il vient $t = \infty$. *Le mobile n'arrive donc jamais au point le plus élevé du cercle, mais il s'en approche indéfiniment.*

93. Considérons maintenant le cas où le mobile oscille de part et d'autre du point le plus bas, et posons :

$$\frac{v_0^2}{2g} + h = k < 2a\,;$$

nous aurons alors, pour *le mouvement descendant* :

$$dt = -\frac{a\,dz}{\sqrt{2az - z^2}\sqrt{2gk - 2gz}}$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{2g}}\frac{dz}{\sqrt{2az - z^2}\sqrt{k - z}},$$

ou bien :

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{kz - z^2}}\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Comme $\frac{z}{2a}$ est moindre que l'unité, on peut développer le binôme $\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}}$ en une série convergente :

$$\left(1 - \frac{z}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{z}{2a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\left(\frac{z}{2a}\right)^2 + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\left(\frac{z}{2a}\right)^n + \dots$$

Nous aurons donc à intégrer des expressions de la forme :

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{kz - z^2}}.$$

Or, on a :

$$\int \frac{z^n\,dz}{\sqrt{kz - z^2}} = -\frac{z^{n-1}\sqrt{kz - z^2}}{n} + \frac{(2n-1)k}{2n}\int \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{kz - z^2}}.$$

Proposons-nous de déterminer le temps t que le mobile met à arriver au point le plus bas. A cet effet, observons que la vitesse au point le plus bas étant égale à $\sqrt{v_0^2 + 2gh}$, il résulte de la formule :

$$v_0^2 + 2gh = 2gk,$$

que *cette vitesse est* $\sqrt{2gk}$; *ce sera donc la vitesse due à la hauteur* k.

Donc, pour obtenir le temps que le mobile met à arriver au point le plus bas, nous devons intégrer entre les limites k et 0 ; ce temps sera évidemment le même que celui que le mobile mettrait à remonter à la hauteur k, puisque, pour *la branche montante,* nous devons intégrer la même expression, prise en signe contraire, entre les limites 0 et k.

On a d'ailleurs :

$$\int_0^k \frac{z^n dz}{\sqrt{kz - z^2}} = \frac{(2n-1)k}{2n} \int_0^k \frac{z^{n-1}dz}{\sqrt{kz - z^2}}.$$

Si l'on pose, en général,

$$\int_0^k \frac{z^n dz}{\sqrt{kz - z^2}} = A_n,$$

il vient :

$$A_n = \frac{(2n-1)k}{2n} A_{n-1}.$$

Or, comme on a :

$$A_0 = \int_0^k \frac{dz}{\sqrt{kz - z^2}} = \pi,$$

on trouve :

$$A_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} k^n \pi.$$

Puisque la durée de la demi-oscillation descendante est égale à la durée de la demi-oscillation montante, nous aurons, en désignant par T la durée de l'oscillation entière :

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ A_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2a}\right) A_1 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{2a}\right)^2 A_2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left(\frac{1}{2a}\right)^n A_n + \ldots \right\},$$

ou bien :

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{k}{2a}\right)^2 + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right)^2 \left(\frac{k}{2a}\right)^n + \ldots \right\}.$$

Cette série est très convergente, si $\frac{k}{2a}$ est très petit, et l'on pourra facilement calculer l'erreur commise en s'arrêtant à un terme quelconque.

94. Dans le cas où les oscillations sont très petites, k est très petit, et l'on pourra s'arrêter au premier terme. On aura alors :

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}};$$

la durée de l'oscillation entière est indépendante de k.

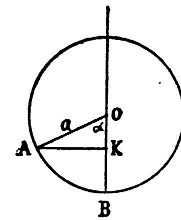
Si l'on prend les deux premiers termes, on a :

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{k}{2a}\right\} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{k}{8a}\right).$$

La durée de l'oscillation dépend alors de la hauteur k.

REMARQUE. — Il est facile de voir qu'en désignant par α l'angle supposé très petit correspondant à la hauteur k, on a (fig. 20) :

Fig. 20.



$$\frac{k}{a} = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 ;$$

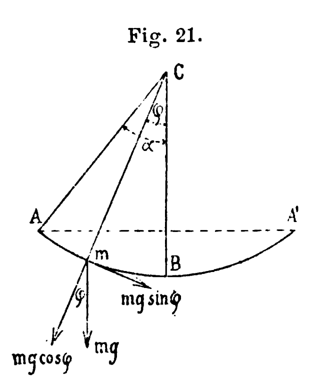
par conséquent, la première valeur approchée de T est en erreur d'une quantité du second ordre par rapport à l'angle α, et la seconde est en erreur d'une quantité du quatrième ordre.

CHAPITRE VIII.

Mouvement du pendule simple dans le vide.

95. PROBLÈME. — *Un point matériel pesant est suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible et sans masse. L'autre extrémité* C *du fil est fixe. Ce point se meut librement dans le vide, sans sortir du plan vertical passant par sa position d'équilibre* CB. *Trouver les lois du mouvement.*

Fig. 21.



Soient A la position initiale du mobile (fig. 21), α l'angle que fait le fil avec la verticale dans cette position initiale, v_0 la vitesse initiale, φ l'angle que fait le fil avec la verticale à la fin du temps t, v la vitesse à cet instant.

Nous décomposerons l'action de la pesanteur au point m en deux forces : une force normale $mg \cos \varphi$ qui est détruite par la résistance du fil, et une force tangentielle $mg \sin \varphi$.

L'équation du mouvement est donc :

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi,$$

ou bien :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi.$$

Soit Am = s l'arc décrit par le mobile à la fin du temps t; nous aurons, en désignant par r la longueur du fil :

$$s = r(\alpha - \varphi),$$

d'où :

$$v = \frac{ds}{dt} = -r \frac{d\varphi}{dt},$$

et, par suite,

$$\frac{dv}{dt} = -r \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

L'équation du mouvement est donc :

$$r \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g \sin \varphi. \qquad (1)$$

Multipliant les deux membres par $2d\varphi$, et intégrant, il vient :

$$r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C + 2g \cos \varphi. \qquad (2)$$

Pour déterminer la constante, faisons $t = 0$, d'où $\varphi = \alpha$; d'ailleurs, la vitesse initiale étant v_0, nous aurons :

$$-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = v_0 ;$$

par conséquent,

$$C + 2g \cos \alpha = \frac{v_0^2}{r}.$$

L'équation (2) devient alors :

$$r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{v_0^2}{r} - 2g \cos \alpha + 2g \cos \varphi,$$

d'où l'on tire :

$$dt = \mp \frac{rd\varphi}{\sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos \varphi - \cos \alpha)}}. \qquad (3)$$

On prendra le signe —, lorsque le point m se meut dans le sens ABA', puisque φ diminue quand t augmente : nous considérerons l'angle φ comme négatif, quand le rayon Cm passe de l'autre côté de la verticale CB. On prendra le signe +, quand le point m se meut en sens contraire.

96. L'équation (3) est intégrable, lorsque l'on a :

$$v_0^2 = 2gr(1 + \cos \alpha),$$

c'est-à-dire *lorsque la vitesse initiale* v_0 *est celle que le mobile acquiert en descendant du point le plus haut du cercle décrit avec* r *comme rayon.*

On a alors :

$$dt = \mp \frac{rd\varphi}{\sqrt{2gr(1+\cos\varphi)}} = \mp \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Si nous considérons seulement le mouvement dans le sens ABA', nous aurons :

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\varphi}{2\cos\frac{1}{2}\varphi},$$

d'où, en intégrant,

$$t = C + \sqrt{\frac{r}{g}}\, l\,.\, \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right).$$

Pour déterminer la constante, faisons $t = 0$, d'où $\varphi = \alpha$, et il vient :

$$0 = C + \sqrt{\frac{r}{g}}\, l\,.\, \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right);$$

nous aurons donc :

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\, l\,.\, \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4}\right)}{\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)}. \qquad (4)$$

C'est la formule qui donne *le temps employé par le mobile pour décrire l'arc* Am, en supposant qu'il parte sans vitesse initiale de l'extrémité B' du diamètre BCB'.

Si, dans cette formule (4), on fait $\varphi = 0$, il vient :

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\, l.\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right).$$

C'est *le temps employé par le mobile pour décrire l'arc* AB.

Pour avoir la durée de *l'oscillation entière*, faisons $\varphi = -\alpha$ dans la formule (4), et il viendra, en désignant ce temps par T :

$$T = \sqrt{\frac{r}{g}}\, l.\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)} = \sqrt{\frac{r}{g}}\, l.\operatorname{cotg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{r}{g}}\, l.\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right) = 2t.$$

Donc, *le temps que le mobile emploie pour aller de* A *en* A', *est double du temps employé pour aller de* A *en* B.

Pour avoir le temps que le mobile mettrait pour revenir en B', extrémité supérieure du diamètre BCB', il faudrait faire $\varphi = -\pi$ dans la formule (4), ce qui nous donne :

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\, l.\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)} = \infty.$$

Il faudrait donc un temps infini au mobile pour remonter jusqu'au point B' (n° **92**).

Cas des petites oscillations.

97. Supposons que *le pendule effectue de très petites oscillations autour de la verticale*, et supposons, en outre, que la *vitesse initiale* au point A *soit nulle*.

L'équation (3) nous donne alors :

$$dt = -\frac{rd\varphi}{\sqrt{2gr(\cos\varphi - \cos\alpha)}} = -\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Or, puisque α et φ sont supposés très petits, nous pourrons poser :

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

et nous aurons :

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \operatorname{arc}\cos\frac{\varphi}{\alpha} + const.$$

Mais, pour $t = 0$, on a $\varphi = \alpha$; par conséquent, la constante est nulle, et il vient :

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \operatorname{arc}\cos\frac{\varphi}{\alpha}. \qquad (5$$

Cette formule donne *le temps employé par le mobile pour décrire l'arc* Am.

On en tire :

$$\varphi = \alpha \cos t \sqrt{\frac{g}{r}}, \qquad (6)$$

équation qui détermine la position du mobile à la fin du temps t.

Pour trouver la *durée d'une demi oscillation*, il faut faire $\varphi = 0$ dans la formule (5), et il viendra :

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Pour avoir la *durée de l'oscillation entière*, on fait $\varphi = -\alpha$, et l'on a :

$$\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}} = 2t; \qquad (7)$$

on voit que T dépend de r seulement : il est indépendant de α. Par conséquent, *la durée de l'oscillation entière est indépendante de son amplitude, pourvu que celle-ci soit très petite. Ce temps est double de celui qui correspond à la demi oscillation.*

Les oscillations sont dites *isochrones.*

98. La formule (7) permet de donner une autre forme à l'équation (6). En effet, de cette formule (7) on tire :

$$\sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{\pi}{\mathrm{T}};$$

par conséquent, on a :

$$\varphi = \alpha \cos \frac{\pi t}{T}.$$

On en tire :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\alpha\pi}{T} \sin \frac{\pi t}{T}.$$

De ces deux dernières formules on conclut :

1° que φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ restent les mêmes lorsque t augmente de 2T, c'est-à-dire que *la position du mobile et sa vitesse redeviennent les mêmes après la durée d'une double oscillation.*

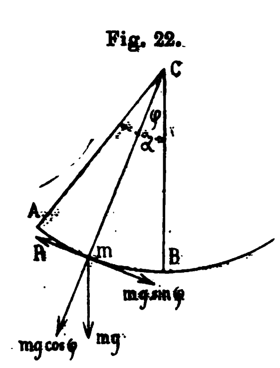
2° que, si t augmente de T, φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ changent de signe en conservant leurs valeurs absolues. Ainsi, *à des intervalles de temps qui diffèrent d'une oscillation, le pendule fait des angles égaux avec la verticale, mais de côtés différents, et ses vitesses, dans ces positions, sont égales et de signes contraires.*

Mouvement du pendule simple dans un milieu résistant.

99. Proposons-nous d'étudier *le mouvement du pendule simple dans l'air.*

Au point m (fig. 22) les forces qui agissent sur le mobile sont l'action de la pesanteur et la résistance de l'air. Cette dernière agit en sens contraire du mouvement : nous la désignerons par R. En décomposant l'action de la pesanteur au point m, nous obtiendrons une composante normale $mg \cos \varphi$ qui est détruite par la résistance du fil, et une force tangentielle $mg \sin \varphi$.

Fig. 22.



L'équation du mouvement est donc :

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \varphi - \text{R}.$$

Comme il s'agit de petites vitesses, nous supposerons la résistance R proportionnelle à la vitesse, et nous poserons :

$$\text{R} = \frac{mg}{k} v.$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin \varphi - \frac{g}{k} v,$$

ou bien :

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \sin \varphi - \frac{g}{k} \frac{ds}{dt}.$$

Or, on a :

$$s = r (\alpha - \varphi),$$

d'où :

$$\frac{ds}{dt} = - r \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = - r \frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

l'équation du mouvement est donc :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{k} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{r} \sin \varphi = 0.$$

Or, si nous supposons les oscillations très petites, l'angle φ sera très petit et nous pourrons remplacer $\sin \varphi$ par φ ; nous aurons alors l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{k} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{r} \varphi = 0. \tag{1}$$

L'équation caractéristique est :

$$\beta^2 + \frac{g}{k} \beta + \frac{g}{r} = 0, \tag{2}$$

d'où l'on tire :

$$\beta = -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\frac{g^2}{4k^2} - \frac{g}{r}}.$$

Or, ces deux racines sont imaginaires : en effet, il est facile de s'assurer que, si les racines de l'équation (2) étaient réelles et inégales, ou bien réelles et égales, φ ne pourrait jamais devenir nul, et le pendule ne reviendrait pas à la position verticale, ce qui n'est pas.

100. Supposons d'abord les *racines réelles et inégales :* elles seront négatives, car on a :

$$\sqrt{\frac{g^2}{4k^2} - \frac{g}{r}} < \frac{g}{2k}.$$

Nous les désignerons par $-\beta'$ et $-\beta''$, et nous supposerons $\beta' > \beta''$ en valeur absolue. Nous aurons alors pour la solution générale de l'équation (1) :

$$\varphi = Ce^{-\beta' t} + C'e^{-\beta'' t},$$

d'où :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -C\beta' e^{-\beta' t} - C'\beta'' e^{-\beta'' t}.$$

Pour déterminer les constantes, nous remarquerons que, pour $t = 0$, on a $\varphi = \alpha$; d'autre part, la vitesse initiale étant nulle, on a aussi $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, pour $t = 0$; par suite, il vient :

$$\alpha = C + C',$$

$$0 = C\beta' + C'\beta'';$$

d'où l'on tire :

$$C = -\frac{\alpha\beta''}{\beta' - \beta''}, \quad C' = \frac{\alpha\beta'}{\beta' - \beta''}.$$

Par suite,

$$\varphi = -\frac{\alpha}{\beta' - \beta''}\left\{\beta'' e^{-\beta' t} - \beta' e^{-\beta'' t}\right\}.$$

Or, puisque $\beta' > \beta''$, on a $e^{-\beta' t} < e^{-\beta'' t}$, et, en multipliant par $\beta'' < \beta'$, il vient : $\beta'' e^{-\beta' t} < \beta' e^{-\beta'' t}$. Par conséquent, φ ne pourrait tendre vers zéro que si t tend vers l'infini. Le mouvement est *apériodique*, puisque le pendule tend asymptotiquement vers sa position d'équilibre.

101. Supposons en second lieu les *racines réelles et égales :* elles seront toutes les deux négatives, et la solution générale de l'équation (1) sera alors :

$$\varphi = e^{-\beta t}(C + C't),$$

d'où :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\beta e^{-\beta t}(C + C't) + C' e^{-\beta t}.$$

En faisant $t = 0$, on a :

$$\alpha = C, \quad 0 = C' - \beta C,$$

d'où :

$$C = \alpha, \quad C' = \alpha\beta ;$$

par suite,

$$\varphi = \alpha e^{-\beta t}(1 + \beta t).$$

Or, puisque β est positif, cette valeur de φ ne pourrait être nulle que pour $t = \infty$. Le mouvement est donc encore *apériodique.*

Il résulte de là que les racines de l'équation (2) sont imaginaires, si, comme nous l'admettons, le mouvement doit être *oscillatoire.*

102. Cela posé, reprenons les valeurs de β que nous pouvons mettre sous la forme :

$$\beta = -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{\frac{gr}{4k^2} - 1};$$

ces racines étant imaginaires, posons :

$$\sqrt{1 - \frac{gr}{4k^2}} = \gamma,$$

et nous aurons :

$$\beta = -\frac{g}{2k} \pm \gamma\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{-1}.$$

La solution générale de l'équation (1) sera donc :

$$\varphi = Ce^{\left(-\frac{g}{2k} + \gamma\sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{-1}\right)t} + C'e^{\left(-\frac{g}{2k} - \gamma\sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{-1}\right)t}$$

$$= e^{-\frac{gt}{2k}}\left\{Ce^{\gamma t\sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{-1}} + C'e^{-\gamma t\sqrt{\frac{g}{r}}\sqrt{-1}}\right\},$$

ou bien :

$$\varphi = e^{-\frac{gt}{2k}}\left\{A\cos\gamma t\sqrt{\frac{g}{r}} + B\sin\gamma t\sqrt{\frac{g}{r}}\right\}. \qquad (3)$$

Pour déterminer les constantes qui entrent dans cette formule, nous ferons $t = 0$; d'où $\varphi = \alpha$, et $\frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Or, on a :

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{2k}\left(A \cos \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}} + B \sin \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}}\right) e^{-\frac{gt}{2k}}$$

$$+ e^{-\frac{gt}{2k}}\left(-A\gamma\sqrt{\frac{g}{r}} \sin \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}} + B\gamma\sqrt{\frac{g}{r}} \cos \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}}\right). \quad (4)$$

Par suite, en faisant $t = 0$ dans (3) et (4), on a :

$$\alpha = A,$$

$$0 = -\frac{g}{2k} A + B\gamma\sqrt{\frac{g}{r}};$$

d'où l'on tire :

$$A = \alpha, \quad B = \frac{\alpha \sqrt{gr}}{2k\gamma}.$$

On a donc enfin :

$$\varphi = \alpha e^{-\frac{gt}{2k}}\left\{\cos \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{\sqrt{gr}}{2k\gamma} \sin \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}}\right\}, \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g}{2k} e^{-\frac{gt}{2k}} \alpha\left\{\cos \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{\sqrt{gr}}{2k\gamma} \sin \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}}\right\}$$

$$+ \alpha e^{-\frac{gt}{2k}}\left\{-\gamma\sqrt{\frac{g}{r}} \sin \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}} + \frac{\sqrt{gr}}{2k}\sqrt{\frac{g}{r}} \cos \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}}\right\}. \quad (6)$$

Or, il est facile de voir que, dans l'expression de $\frac{d\varphi}{dt}$, le coefficient de $\cos \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}}$ est nul ; quant au coefficient de $\sin \gamma t \sqrt{\frac{g}{r}}$, on a :

$$-\alpha\left(\frac{g}{2k}\frac{\sqrt{gr}}{2k\gamma}+\gamma\sqrt{\frac{g}{r}}\right)=-\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{r}}\left(\frac{gr}{4k^2}+\gamma^2\right)=-\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{r}};$$

par conséquent, l'équation (6) devient :

$$\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{r}}e^{-\frac{gt}{2k}}\sin \gamma t\sqrt{\frac{g}{r}}. \tag{7}$$

Pour trouver la *durée d'une oscillation*, observons qu'à la fin de chaque oscillation on a $\frac{d\varphi}{dt}=0$; or, cette condition nous donne :

$$\gamma t\sqrt{\frac{g}{r}}=n\pi;$$

par suite, nous trouvons pour la durée de la première oscillation :

$$T=\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{r}{g}}, \tag{8}$$

formule dans laquelle :

$$\gamma=\sqrt{1-\frac{gr}{4k^2}}.$$

La formule (8) ne diffère de celle qui se rapporte au mouvement dans le vide (n° **97**) que par le dénominateur γ. On en conclut que *les oscillations sont isochrones comme dans le vide, et leur durée est augmentée dans le rapport de* 1 *à* γ.

Si, dans la formule (5), on fait successivement :

$$t = 0, \quad \frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{r}{g}}, \quad \frac{2\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{r}{g}}, \ldots,$$

on obtient les valeurs suivantes :

$$\varphi = \alpha, \quad -\alpha e^{-\frac{\pi}{2k\gamma}\sqrt{gr}}, \quad \alpha e^{-\frac{2\pi}{2k\gamma}\sqrt{gr}}, \ldots.$$

Donc, les amplitudes successives des diverses oscillations forment une progression géométrique décroissante dont la raison est $e^{-\frac{\pi}{2k\gamma}\sqrt{gr}}$.

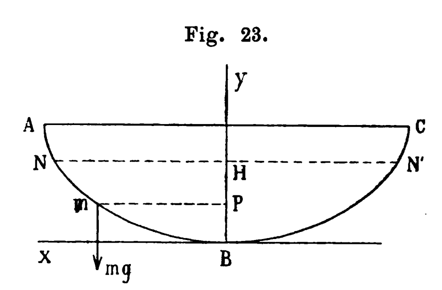
CHAPITRE IX.

Mouvement d'un point matériel pesant sur une cycloïde.

103. Considérons *un point matériel pesant se mouvant sur une cycloïde* ABC *dont l'axe est vertical.*

Prenons pour axe des x (fig. 23) la tangente Bx au point le plus bas, pour axe des y la perpendiculaire

Fig. 23.



menée en sens inverse de la pesanteur. Soient N la position initiale du mobile, la vitesse étant nulle en ce point, m la position du mobile à la fin du temps t, (x, y) ses coordonnées, v sa vitesse à cet instant, et BH $= h$ la hauteur du point N au-dessus de l'horizontale.

Les composantes de la force étant :

$$X = 0, \quad Y = -mg,$$

nous aurons, en vertu du théorème des forces vives, qui est applicable dans le cas actuel (n° **49**):

$$mv^2 = -2mg \int_0^t dy = 2mg\,(h - y)\,;$$

par conséquent, l'équation du mouvement est :

$$v^2 = 2g\,(h - y),$$

ou bien :

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2g\,(h - y). \qquad (1)$$

Or, si nous désignons par a le rayon du cercle générateur, l'équation de la cycloïde est :

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}\,;$$

par suite,

$$ds^2 = \frac{2a}{y}\,dy^2,$$

et l'équation (1) nous donne :

$$\frac{2a}{y}\,\frac{dy^2}{dt^2} = 2g\,(h - y),$$

d'où l'on tire :

$$dt = \mp \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}}.$$

On prendra le signe — lorsque le mobile descendra, puisque, dans ce cas, y diminue quand t augmente, et, par conséquent, dy et dt sont de signes contraires ; on prendra le signe + lorsque le mobile montera.

104. Considérons le mouvement descendant, et nous aurons :

$$dt = -\sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{hy-y^2}};$$

d'où, en intégrant :

$$t = C + \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{2y-h}{h}.$$

Pour détérminer la constante, faisons $t = 0$, $y = h$, et nous aurons $C = 0$.

On a donc :

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \arccos \frac{2y-h}{h}.$$

C'est *le temps employé par le mobile pour décrire l'arc* Am.

Si, dans cette formule, on fait $y = 0$, il vient :

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

pour *le temps employé par le mobile pour décrire l'arc* AB. Ce temps est, comme on le voit, indépendant de h. Donc, *quel que soit le point de départ du mobile, il arrivera au point le plus bas dans le même temps.* C'est pour cette raison que la courbe s'appelle *Tautochrone.*

D'autre part, si l'on considère le mouvement ascendant, on a :

$$dt = \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}},$$

d'où, en intégrant entre les limites 0 et h :

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{hy - y^2}} = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

On voit donc que le temps employé par le mobile pour remonter à la hauteur h est égal au temps employé pour descendre de la même hauteur.

La *durée de l'oscillation entière* sera donc :

$$\mathrm{T} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} = \pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Or, $4a$ est le rayon de courbure de la cycloïde au point le plus bas. Donc (n° **97**), *la durée de l'oscillation sur la cycloïde pour une amplitude quelconque est la même qu'elle serait sur le cercle osculateur au point le plus bas pour de petites amplitudes.*

105. Proposons-nous maintenant de démontrer que *la cycloïde est la seule courbe tautochrone plane dans le vide.* A cet effet, nous allons chercher quelle est

la courbe plane sur laquelle un point pesant, abandonné sans vitesse initiale d'un point quelconque de cette courbe, parvient dans le même temps au point le plus bas.

Soient $s = \varphi(y)$ l'équation de la courbe, l'arc s étant compté à partir du point le plus bas, et h la hauteur d'où part le mobile.

L'équation des forces vives nous donne :

$$v = \sqrt{2g(h-y)},$$

d'où l'on tire :

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}},$$

en observant que s diminue quand t augmente.

Nous aurons donc pour la durée du parcours depuis la hauteur h jusqu'au point le plus bas :

$$t = \int_h^o \frac{-ds}{\sqrt{2g(h-y)}} = \int_o^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}.$$

Il s'agit de déterminer s en fonction de y, de telle manière que l'intégrale soit *indépendante de h.*

Or, on a :

$$ds = \varphi'(y)\,dy,$$

par conséquent,

$$t = \int_o^h \frac{\varphi'(y)\,dy}{\sqrt{2g(h-y)}}.$$

Comme l'ordonnée y varie de 0 à h, nous pouvons poser :

$$y = h\theta,$$

θ étant une quantité positive, moindre que l'unité, et nous aurons :

$$t = \int_0^1 \frac{\varphi'(h\theta)\, h d\theta}{\sqrt{2gh(1-\theta)}} = \int_0^1 \frac{\varphi'(h\theta)\sqrt{h\theta}\, d\theta}{\sqrt{2g\theta(1-\theta)}},$$

et les limites de l'intégrale sont constantes.

Or, pour que t soit indépendant de h, il faut et il suffit que la fonction $\varphi'(h\theta)\sqrt{h\theta}$ soit indépendante de h ; soit, en effet,

$$\varphi'(h\theta)\sqrt{h\theta} = \psi(h\theta),$$

nous aurons :

$$t = \int_0^1 \frac{\psi(h\theta)\, d\theta}{\sqrt{2g\theta(1-\theta)}}.$$

Prenons la dérivée par rapport à h, il viendra :

$$\frac{dt}{dh} = \int_0^1 \frac{\psi'(h\theta)\,\theta\, d\theta}{\sqrt{2g\theta(1-\theta)}},$$

et cette fonction doit être nulle, quel que soit h. Donc, $\psi'(h\theta)$ doit être identiquement nulle ; sans cela, on pourrait prendre h assez petit pour que $\psi'(h\theta)$ conservât le même signe pour toute valeur de $h\theta$ comprise entre 0 et h, et alors la somme ne pourrait être nulle.

On a donc :

$$\psi'(h\theta) = 0,$$

ou bien, en remplaçant $h\theta$ par sa valeur y,

$$\psi'(y) = 0.$$

On en tire :

$$\psi(y) = const.,$$

et, par conséquent,

$$\varphi'(y)\sqrt{y} = const. = \sqrt{A},$$

d'où :

$$\varphi'(y) = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{y}},$$

et, en intégrant,

$$\varphi(y) = 2\sqrt{Ay}.$$

L'équation de la courbe est donc :

$$s = 2\sqrt{Ay};$$

or, cette équation est celle d'une cycloïde dont le rayon a du cercle générateur est donné par la formule :

$$8a = 4A,$$

d'où :

$$a = \frac{1}{2}A.$$

Brachystochrone.

106. La cycloïde jouit encore d'une autre propriété remarquable.

Soient A et B deux points situés dans un plan vertical, A le plus élevé des deux. Supposons qu'entre ces deux points on mène une courbe quelconque ACB (fig. 24), et qu'un point matériel pesant glisse sans frottement le long de cette courbe.

Fig. 24.

Le théorème des forces vives qui est applicable (n° **49**), nous permet de déterminer le temps T employé par le mobile pour décrire l'arc AB.

Cela posé, nous allons démontrer que *la cycloïde à axe vertical, dont le point de rebroussement est en* A, *et qui passe par le point* B, *est la courbe pour laquelle le temps* T *est un minimum.* Cette propriété a fait donner à la cycloïde le nom de ***brachystochrone***.

Prenons pour axe des x l'horizontale Bx passant par le point le plus bas B, l'axe des y étant vertical. Le temps T employé à décrire l'arc AB sera donné par la formule :

$$T = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-y)}}. \qquad (1)$$

La question proposée consiste donc à trouver entre les points A et B une courbe telle que *l'intégrale* (1) *soit un minimum*. Or, on a :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{h-y}}\, dx,$$

et, si l'on pose :

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{h-y}}, \qquad (2)$$

la question est ramenée à rendre l'intégrale :

$$\int_0^h V dx,$$

un minimum ; on sait qu'il faut pour cela que l'on ait :

$$\delta \int_a^h V dx = 0.$$

Mais, si nous prenons x pour variable indépendante, nous aurons $d\delta x = 0$, et, par conséquent,

$$\delta \int V dx = \int \delta V dx.$$

D'ailleurs, V étant une fonction de y et de y', on a :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial y'} dy' = N dy + P dy',$$

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial y'} \delta y' = N \delta y + P \delta y';$$

d'autre part, à cause de $d\delta x = 0$, il vient :

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx},$$

par suite,

$$\delta \int V dx = \int (N \delta y \, dx + P d\delta y) = P \delta y + \int \left(N - \frac{dP}{dx}\right) \delta y \, dx,$$

et comme δy est nul aux limites, puisque les points A et B sont fixes, on a :

$$\delta \int_0^h V dx = \int_0^h \left(N - \frac{dP}{dx}\right) \delta y \, dx.$$

Il en résulte que la condition :

$$\delta \int_0^h V dx = 0,$$

nous donne l'équation :

$$N - \frac{dP}{dx} = 0. \qquad (3)$$

De (2) on tire facilement :

$$N = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{(h - y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$P = \frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{(h - y)(1 + y'^2)}};$$

et l'équation (3) nous donne la suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{(h - y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d \dfrac{y'}{\sqrt{(h - y)(1 + y'^2)}}}{dx}. \qquad (4)$$

Pour intégrer cette équation différentielle, posons :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

d'où :

$$dx = \operatorname{cotg} \alpha \, dy,$$

et l'équation (4) devient :

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\cos \alpha \, (h - y)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d \dfrac{\sin \alpha}{\sqrt{h - y}}}{\operatorname{cotg} \alpha \, dy},$$

ou bien, en réduisant :

$$\frac{dy}{\sin \alpha} = 2 (h - y) \cos \alpha \, d\alpha + \sin \alpha \, dy.$$

On en tire :

$$\frac{dy}{h-y} = \frac{2 \sin \alpha \, d\alpha}{\cos \alpha};$$

d'où, en intégrant :

$$l \, . \, (h-y) = 2 \, l \, . \cos \alpha + l \, . \, c,$$

ou bien :

$$h - y = c \cos^2 \alpha = \frac{c}{1 + y'^2}.$$

Nous aurons donc pour l'équation différentielle de la courbe :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c}{h-y} - 1}. \qquad (5)$$

Or, si l'on rapporte cette courbe à deux axes rectangulaires ayant pour origine le point A, l'axe des y étant dirigé de haut en bas, les formules de transformation sont, en posant $AK = k$:

$$x = k - x',$$

$$y = h - y',$$

et l'équation (5) devient :

$$\frac{dy'}{dx'} = \sqrt{\frac{c}{y'} - 1};$$

sous cette forme on voit que *la courbe est une cycloïde* dont l'axe des x' est la base, le point A étant le point de rebroussement.

107. REMARQUE. — On peut résoudre la question de la manière suivante, en observant que la condition pour que T soit un minimum est :

$$\delta \int_o^h \frac{ds}{\sqrt{h-y}} = 0. \qquad (6)$$

Or, on a :

$$\delta \int \frac{ds}{\sqrt{h-y}} = \int \frac{\delta ds}{\sqrt{h-y}} - \int \frac{ds \,.\, \delta \sqrt{h-y}}{h-y};$$

mais,

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\,\delta dx + \frac{dy}{ds}\,\delta dy,$$

par conséquent, la condition de minimum (6) nous donne :

$$\int_o^h \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{h-y}}\, d\delta x + \int_o^h \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}}\, d\delta y + \int_o^h \frac{ds\,\delta y}{2\,(h-y)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

En intégrant par parties les deux premiers termes, il vient :

$$\left(\frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{h-y}}\,\delta x + \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}}\,\delta y\right)_o^h$$

$$-\int_o^h \left\{ \delta x d \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{h-y}} + \delta y \left(d\,\frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}} - \frac{ds}{2\,(h-y)^{\frac{3}{2}}} \right) \right\} = 0.$$

Le premier terme est nul, puisque δx et δy sont nuls aux deux limites ; par suite, on a :

$$\int_0^h \left\{ \delta x \, d \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{h-y}} + \delta y \left(d \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}} - \frac{ds}{2(h-y)^{\frac{3}{2}}} \right) \right\} = 0 ;$$

on en conclut les deux équations :

$$d \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{h-y}} = 0, \tag{7}$$

$$d \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}} - \frac{ds}{2(h-y)^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{8}$$

Or, il est facile de voir que ces deux équations se réduisent à la première ; en effet, on a identiquement :

$$\left(\frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{h-y}} \right)^2 + \left(\frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}} \right)^2 = \frac{1}{h-y},$$

d'où, en différentiant, et en ayant égard à l'équation (7), il vient :

$$\frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}} \, d \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{h-y}} = \frac{dy}{2(h-y)^2},$$

ce qui est l'équation (8).

D'ailleurs, de l'équation (7) on tire :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{h - y}}{\sqrt{c}},$$

ou bien :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{\sqrt{h - y}}{\sqrt{c}},$$

d'où enfin :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c}{h - y} - 1}.$$

C'est l'équation (5) que nous avons trouvée précédemment (n° **106**).

CHAPITRE X.

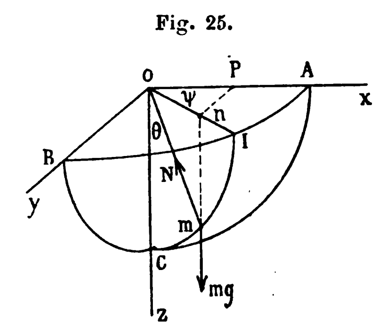
Mouvement d'un point matériel sur une sphère. — Pendule conique.

108. PROBLÈME. — *Un point matériel pesant, suspendu à l'extrémité d'un fil, ayant été écarté de sa position d'équilibre, est lancé dans une direction quelconque. Le mouvement de ce point ne s'effectue plus dans un plan vertical. Ce pendule se meut autour de la verticale passant par le point de suspension : il s'appelle pendule conique. Trouver le mouvement de ce point.*

Le point matériel peut être considéré comme assujetti à se mouvoir sur une sphère ayant pour centre le point de suspension, et pour rayon la longueur du pendule.

Prenons pour origine le centre de la sphère, l'axe des z étant dirigé dans le sens de la pesanteur (fig. 25).

Fig. 25.



Soient N la tension du fil (ou la réaction de la sphère), l la longueur du fil. Les cosinus directeurs de la normale au point m, vers le centre de la sphère, sont $-\frac{x}{l}, -\frac{y}{l}, -\frac{z}{l}$; si nous considérons la quantité N comme positive ou négative, suivant que la réaction est dirigée

vers l'intérieur ou vers l'extérieur de la sphère, nous aurons pour les équations différentielles du mouvement :

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{\mathrm{N}x}{l}, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{\mathrm{N}y}{l}, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= mg - \frac{\mathrm{N}z}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On a d'ailleurs :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad (2)$$

Ces quatre équations serviront à déterminer x, y, z, N en fonction de t.

Des deux premières on tire :

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c, \quad (3)$$

c étant une constante. Cette équation n'est autre que celle que l'on obtiendrait en appliquant le théorème des aires au mouvement projeté sur le plan des xy : ce théorème est, en effet, applicable, puisque la résultante de N et de mg est dirigée dans le plan passant par le point m et par la verticale du point de suspension (n° **27**).

Multipliant les équations (1) par dx, dy, dz, et ajoutant, il vient :

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = g dz,$$

le coefficient de N étant nul, puisque l'on a :

$$xdx + ydy + zdz = 0 ;$$

en intégrant, il vient :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c' + 2gz, \qquad (4)$$

ou bien :

$$v^2 = c' + 2gz,$$

c' étant une constante que l'on déterminera au moyen des conditions initiales du mouvement, qui nous donneront :

$$c' = v_0{}^2 - 2gz_0,$$

en désignant par v_0 la vitesse initiale, et par z la valeur initiale de la coordonnée z.

On pouvait d'ailleurs obtenir l'équation (4) en appliquant le théorème des forces vives qui est applicable dans le cas actuel (n° **49**).

Les équations (2), (3) et (4) serviront à déterminer x, y, z en fonction de t.

109. On peut, pour intégrer les équations (3) et (4), changer de variables, et prendre pour variables

nouvelles l'angle θ que fait le rayon Om avec l'axe Oz, et l'angle ψ que la projection de ce rayon sur le plan des xy fait avec l'axe Ox. On a alors les formules :

$$x = l \sin\theta \cos\psi,$$

$$y = l \sin\theta \sin\psi,$$

$$z = l \cos\theta,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dx}{dt} = l \cos\theta \cos\psi \frac{d\theta}{dt} - l \sin\theta \sin\psi \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = l \cos\theta \sin\psi \frac{d\theta}{dt} + l \sin\theta \cos\psi \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = - l \sin\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Les équations (3) et (4) deviennent alors :

$$l^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = c,$$

$$l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + l^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2gl \cos\theta + c'.$$

Or, en posant, pour abréger,

$$\frac{c}{l^2} = a, \quad \frac{c'}{l^2} = b,$$

ces équations nous donnent les suivantes :

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = a,$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + b; \tag{5}$$

la dernière devient, en ayant égard à la précédente :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{a^2}{\sin^2\theta} = \frac{2g}{l}\cos\theta + b,$$

d'où l'on tire :

$$dt = \pm \frac{d\theta}{\sqrt{b + \frac{2g}{l}\cos\theta - \frac{a^2}{\sin^2\theta}}}, \tag{6}$$

et, par suite,

$$d\psi = \pm \frac{a d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{b + \frac{2g}{l}\cos\theta - \frac{a^2}{\sin^2\theta}}}.\text{[1]} \tag{7}$$

Comme dt doit toujours être positif, on prendra, dans ces formules, le signe + ou le signe —, suivant que $d\theta$ sera positif ou négatif. On prendra donc le signe + lorsque le mobile monte, et le signe — lorsqu'il descend.

La formule (6) donne t en fonction de θ, au moyen des fonctions elliptiques ; lorsque l'on connaîtra la relation entre t et θ, la formule (7) déterminera ψ en fonction de t.

---

1. *Intégration des équations de la Mécanique*, 1889, p. 94.

110. On peut résoudre la question d'une autre manière, en employant des coordonnées polaires dans le plan des xy. A cet effet, nous désignerons par r le rayon vecteur mené de l'origine à la projection du mobile sur le plan des xy, et nous aurons :

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$xdy - ydx = r^2 d\psi,$$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\psi^2.$$

Les équations (2), (3) et (4) nous donnent alors :

$$r^2 + z^2 = l^2, \tag{8}$$

$$r^2 d\psi = cdt, \tag{9}$$

$$\frac{dr^2 + r^2 d\psi^2 + dz^2}{dt^2} = c' + 2gz. \tag{10}$$

Or, on a :

$$rdr + zdz = 0,$$

et l'équation (10) devient :

$$\frac{z^2 dz^2 + r^4 d\psi^2 + r^2 dz^2}{r^2 dt^2} = c' + 2gz,$$

ou bien, à cause de (9),

$$\frac{l^2 dz^2 + c^2 dt^2}{(l^2 - z^2)\, dt^2} = c' + 2gz,$$

d'où l'on tire :

$$dt = \pm \frac{ldz}{\sqrt{(l^2-z^2)(c'+2gz)-c^2}}, \qquad (11)$$

et, par conséquent,

$$d\psi = \pm \frac{lcdz}{(l^2-z^2)\sqrt{(l^2-z^2)(c'+2gz)-c^2}}. \qquad (12)$$

Comme la différentielle dt est toujours positive, on prendra le signe + lorsque le mobile descend, car dz est alors positif, et le signe — lorsqu'il monte.

Les deux dernières équations donnent t et ψ en fonction de z, et l'équation (8) nous donnera r en fonction de z.

Les équations (11) et (12) ne peuvent être intégrées que par les fonctions elliptiques ou par approximation.

111. Pour déterminer la tension N du fil, multiplions les équations (1) par x, y, z et ajoutons ; il viendra :

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} = -\frac{\mathrm{N}}{m}\frac{x^2+y^2+z^2}{l} + gz\,;$$

d'autre part, l'équation (2) nous donne :

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{dt} = 0,$$

d'où :

$$\frac{xd^2x + yd^2y + zd^2z}{dt^2} + \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = 0.$$

Par conséquent, on a :

$$-v^2 = -\frac{Nl}{m} + gz,$$

d'où :

$$N = \frac{mv^2}{l} + \frac{mgz}{l}, \qquad (13)$$

ou bien, en vertu de (4) :

$$N = \frac{m(3gz + c')}{l}.$$

Cette formule nous apprend que N est positive, lorsque z est positif, c'est-à-dire lorsque le point mobile est au-dessous du plan horizontal passant par le centre de la sphère.

112. Remarque. — On aurait pu écrire immédiatement l'équation (13) en appliquant ce que nous avons dit (n° **87**) de la pression exercée par un point mobile assujetti à demeurer sur une surface fixe.

En effet, $\frac{mgz}{l}$ est la projection du poids mg sur la normale à la sphère, et $\frac{mv^2}{l}$ n'est autre que la projection sur cette même normale de la force centrifuge du mobile. En effet, soit R le rayon du cercle suivant lequel le plan osculateur en un point quelconque de la trajectoire coupe la sphère (ou le rayon du cercle osculateur de cette courbe). La force centrifuge sera $\frac{mv^2}{R}$, et, pour avoir sa projection sur la normale à la surface (c'est-à-dire sur le rayon de la sphère qui passe au même point), on doit multiplier cette force par $\frac{R}{l}$.

113. La solution du problème peut être achevée complétement dans le cas où *l'angle* θ *que fait le pendule avec la verticale reste toujours très petit pendant toute la durée du mouvement :* le mobile s'éloigne alors très peu du point le plus bas.

Pour introduire cette condition dans les équations du mouvement, observons que l'on a :

$$\cos\theta = \frac{z}{l},$$

d'où l'on tire :

$$l^2 - z^2 = l^2 \sin^2\theta,$$

$$dz = -l \sin\theta\, d\theta.$$

Or, si l'on suppose l'angle θ très petit, on pourra poser :

$$\sin\theta = \theta, \quad \text{et} \quad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2};$$

par suite,

$$z = l\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right), \quad l^2 - z^2 = l^2\theta^2, \quad dz = -l\theta\, d\theta.$$

Nous aurons donc, dans ce cas,

$$dt = \mp \frac{l^2\theta\, d\theta}{\sqrt{l^2\theta^2\left\{c' + 2gl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right\} - c^2}}$$

$$= \mp \sqrt{\frac{l}{g}}\, \frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{-\theta^4 + \left(\frac{c'}{gl} + 2\right)\theta^2 - \frac{c^2}{gl^3}}}.$$

Or, si l'on désigne par α^2, β^2 les deux valeurs de θ^2 pour lesquelles la quantité sous le radical est nulle, on a :

$$dt = \mp \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{-\theta^4 + (\alpha^2 + \beta^2)\theta^2 - \alpha^2\beta^2}}$$

$$= \mp \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 - \left(\theta^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)^2}}.$$

En intégrant, et observant que la constante est nulle, si l'on compte le temps à partir de l'instant où $\theta = \alpha$, il vient :

$$t = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ arc cos } \frac{2\theta^2 - (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

et, par suite,

$$2\theta^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2) \cos 2t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

ou bien :

$$\theta^2 = \alpha^2 \cos^2 t \sqrt{\frac{g}{l}} + \beta^2 \sin^2 t \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (14)$$

De cette équation on conclut que θ^2 est périodique ; l'angle θ varie entre les limites $\theta = \alpha$ et $\theta = \beta$. La durée de la période comprise entre ce maximum et ce minimum de l'angle θ est :

$$T = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

D'ailleurs, pour $t = 0$, on a : $\theta^2 = \alpha^2$, ou bien $\theta = \alpha$; pour $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on a $\theta^2 = \beta^2$, ou bien $\theta = \beta$; pour $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, on retrouve $\theta = \alpha$.

114. Pour calculer l'angle ψ en fonction du temps, reprenons l'équation :

$$r^2 d\psi = c dt,$$

de laquelle on tire :

$$d\psi = \frac{c dt}{r^2}.$$

Mais on a :

$$r = l \sin\theta = l\theta ;$$

par conséquent,

$$d\psi = \frac{c dt}{l^2 \theta^2},$$

ou bien, en remplaçant θ^2 par sa valeur (14) .

$$d\psi = \frac{c dt}{l^2 \left\{ \alpha^2 \cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}} + \beta^2 \sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}} \right\}}.$$

En intégrant, et supposant que l'on prenne le plan des zx de manière que l'on ait $\psi = 0$, pour $t = 0$, on a :

$$\psi = \frac{c}{l^2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{\alpha\beta} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{tg} t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

On peut simplifier cette expression, en observant que l'on a :

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{c^2}{gl^3},$$

d'où :

$$\alpha\beta = \frac{c}{l^2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Par conséquent,

$$\psi = \text{arc tg}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\text{tg}\,t\sqrt{\frac{g}{l}}\right),$$

ou bien :

$$\text{tg}\,\psi = \frac{\beta}{\alpha}\,\text{tg}\,t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Cette équation détermine. l'angle ψ en fonction de t. On voit que ψ augmente indéfiniment avec t, en passant par les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},\ldots$ aux temps $t = 0$, T, 2T, 3T,... c'est-à-dire aux époques correspondant au maximum et au minimum de l'angle θ. Il s'ensuit que le plan Z Om tourne autour de la verticale OZ, toujours dans le même sens, et qu'il fait une révolution entière dans un temps égal à $4T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

115. Remarque. — De l'équation :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{tg} t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

on tire :

$$\frac{\sin\psi}{\beta\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{\cos\psi}{\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\cos^2 t\sqrt{\frac{g}{l}} + \beta^2\sin^2 t\sqrt{\frac{g}{l}}}} = \frac{1}{\theta};$$

d'où :

$$\theta\sin\psi = \beta\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$\theta\cos\psi = \alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Or, on a :

$$x = l\sin\theta\cos\psi = l\theta\cos\psi = l\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$y = l\sin\theta\sin\psi = l\theta\sin\psi = l\beta\sin t\sqrt{\frac{g}{l}};$$

en éliminant t, il vient :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = l^2.$$

Cette équation représente *la trajectoire de la projection du mobile sur le plan des xy*, et l'on voit que cette projection décrit une ellipse, dont le centre est au point O, et dont les demi axes sont $l\alpha$ et $l\beta$.

CHAPITRE XI.

Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale.

116. Problème. — *Un point matériel libre est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe et dont l'intensité ne dépend que de la distance du point au centre fixe. Trouver les propriétés du mouvement de ce point.*

Nous savons (n° **29**) que la trajectoire est une courbe plane dont le plan passe par le centre d'action, et par la direction de la vitesse initiale du mobile. Nous rapporterons donc le mouvement à deux axes rectangulaires pris dans ce plan, l'origine étant au centre fixe. Désignons par r la distance du point à l'origine, par x, y ses coordonnées, et par φ l'intensité de la force accélératrice. Les cosinus directeurs de cette force sont $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$, si elle est attractive, et $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, si elle est répulsive. Il en résulte que les composantes de la force sont $-\varphi\frac{x}{r}$, $-\varphi\frac{y}{r}$ dans le premier cas, et $\varphi\frac{x}{r}$, $\varphi\frac{y}{r}$ dans le second cas.

Nos formules se rapporteront au premier cas, et il suffira de changer le signe de φ pour les appliquer au second cas.

Les équations différentielles du mouvement sont donc :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r}. \qquad (1)$$

Nous pouvons remarquer ici que la force étant dirigée vers un centre fixe, le principe des aires est applicable (n° **30**), et, par suite, on a, en désignant par θ l'angle que le rayon vecteur r fait avec l'axe des x :

$$r^2 d\theta = cdt, \qquad (2)$$

c étant une constante qui se détermine par les conditions initiales du mouvement. A cet effet, désignons par v_0 la vitesse initiale du mobile, α l'angle qu'elle fait avec la droite menée de la position initiale du mobile vers le centre fixe, r_0 la longueur de cette droite ; on sait (I, n° **76**) que $r\frac{d\theta}{dt}$ est la composante de la vitesse suivant la perpendiculaire au rayon vecteur. Par conséquent, pour $t = 0$, on a :

$$\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = v_0 \sin\alpha, \quad \text{ou bien} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{r_0},$$

et, par suite, l'équation (2) nous donne, en y faisant $t = 0$,

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha. \qquad (3)$$

Le principe des forces vives qui est également applicable au problème actuel (n° **50**) nous donne :

$$vdv = - \varphi dr,$$

ou bien :

$$dv^2 = - 2\varphi dr, \qquad (4)$$

et, en intégrant,

$$v^2 - v_0{}^2 = - 2\int_{r_0}^{r} \varphi dr. \qquad (5)$$

Les équations (2) et (5) peuvent d'ailleurs se déduire facilement des équations (1). Ce sont deux *intégrales premières* des équations du mouvement.

117. Observons encore que, comme nous l'avons vu (n° **32**), l'équation (2) équivaut à la suivante :

$$vp = c,$$

v étant la vitesse, p la perpendiculaire abaissée du centre sur la direction de la vitesse. On en tire :

$$v = \frac{c}{p}.$$

Donc, *la vitesse en un point quelconque de la trajectoire est en raison inverse de la distance du centre fixe à la tangente à la trajectoire au point considéré.*

118. Proposons-nous maintenant de trouver *l'expression de la vitesse en fonction des coordonnées polaires du point mobile.*

Prenons le point O pour pôle, l'axe des x pour axe polaire ; nous aurons :

$$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2};$$

or, de l'équation (2) on tire :

$$dt^2 = \frac{r^4 d\theta^2}{c^2},$$

par conséquent,

$$v^2 = c^2 \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^4 d\theta^2},$$

ou bien :

$$v^2 = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 \right]. \qquad (6)$$

Cette formule permet de déterminer *la vitesse en un point quelconque*, lorsque l'on connaît la trajectoire.

119. On peut aussi trouver *l'expression de la force accélératrice* φ *en fonction des coordonnées polaires du mobile.*

A cet effet, reprenons l'équation :

$$dv^2 = -2\varphi dr; \qquad (4)$$

d'autre part, l'équation (6) nous donne en différentiant, θ étant la variable indépendante :

$$dv^2 = c^2 \left\{ -\frac{2dr}{r^3} - \frac{2dr}{r^2} \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} \right\},$$

d'où, en remplaçant dans (4), il vient :

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right). \tag{7}$$

Cette formule permet de déterminer *la force en un point quelconque* de la courbe, quand on connaît l'équation de la trajectoire.

REMARQUE. — Cette même formule (7) permet de *déterminer la trajectoire*, quand on connaît la loi suivant laquelle la force varie.

120. APPLICATION. — Supposons *la force proportionnelle à la distance du point au centre fixe.* Nous aurons alors :

$$\varphi = \mu r,$$

μ étant une constante positive dans le cas de l'attraction, et négative dans le cas de la répulsion.

Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu y.$$

En intégrant, il vient :

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A}\sin t\sqrt{\mu} + \mathrm{B}\cos t\sqrt{\mu}, \\ y &= \mathrm{A}'\sin t\sqrt{\mu} + \mathrm{B}'\cos t\sqrt{\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

A, B, A′, B′ étant des constantes que l'on détermine par les conditions initiales du mouvement. En prenant pour axe des x la droite qui va du centre à la position initiale du mobile, et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite du même côté que la direction de la vitesse initiale, r_0, v_0 et α ayant les mêmes significations que ci-dessus (nº **116**), nous aurons, pour $t = 0$:

$$x = r_0, \quad y = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -v_0 \cos \alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 \sin \alpha ;$$

ces conditions nous permettent de déterminer les quatre constantes A, B, A′, B′, et nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu} + r_0 \cos t\sqrt{\mu}, \\ y &= \frac{v_0 \sin \alpha}{\sqrt{\mu}} \sin t\sqrt{\mu}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Ces formules *déterminent les coordonnées x, y du mobile en fonction du temps*. Elles donnent pour ces coordonnées des valeurs périodiques, et l'on voit que la *durée de la période* est :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

En éliminant t entre les équations (9), on obtient pour l'équation de la trajectoire :

$$(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2} y^2 = r_0^2 \sin^2 \alpha. \quad (10)$$

Ainsi donc, quand μ est positif, c'est-à-dire lorsque *la force est attractive*, la trajectoire est une *ellipse* ayant pour centre le point fixe. Elle se réduit à un *cercle*, quand on a :

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad v_0^2 = \mu r_0^2.$$

Lorsque μ est négatif, c'est-à-dire lorsque *la force est répulsive*, les équations du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \mu x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu y;$$

en intégrant, il vient :

$$x = \mathrm{A}e^{t\sqrt{\mu}} + \mathrm{B}e^{-t\sqrt{\mu}},$$

$$y = \mathrm{A}'e^{t\sqrt{\mu}} + \mathrm{B}'e^{-t\sqrt{\mu}},$$

et, en observant que pour $t = 0$, on a :

$$x = r_0, \quad y = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = - v_0 \cos\alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = v_0 \sin\alpha,$$

on trouve pour les valeurs des constantes :

$$\mathrm{A} = \frac{r_0}{2} - \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}}, \quad \mathrm{B} = \frac{r_0}{2} + \frac{v_0 \cos\alpha}{2\sqrt{\mu}},$$

$$\mathrm{A}' = - \mathrm{B}' = \frac{v_0 \sin\alpha}{2\sqrt{\mu}};$$

par suite,

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0 \cos \alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{t\sqrt{\mu}} + \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0 \cos \alpha}{2\sqrt{\mu}}\right) e^{-t\sqrt{\mu}}, \\ y &= \frac{v_0 \sin \alpha}{2\sqrt{\mu}} \left(e^{t\sqrt{\mu}} - e^{-t\sqrt{\mu}}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

On en tire :

$$\frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{\mu}} + e^{-t\sqrt{\mu}}\right) = \frac{x \sin \alpha + y \cos \alpha}{r_0 \sin \alpha},$$

$$\frac{1}{2}\left(e^{t\sqrt{\mu}} - e^{-t\sqrt{\mu}}\right) = \frac{y\sqrt{\mu}}{v_0 \sin \alpha},$$

d'où, en élevant au carré et retranchant, il vient pour l'équation de la trajectoire :

$$(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 - \frac{\mu r_0^2}{v_0^2} y^2 = r_0^2 \sin^2 \alpha.$$

C'est l'équation (10) dans laquelle on a changé le signe de μ.

Cette équation représente une *hyperbole* ayant pour centre le point fixe.

Observons que les valeurs (11) deviennent infinies pour $t = \infty$; donc, le mobile mettrait un temps infini pour parcourir la branche d'hyperbole sur laquelle il se trouve au commencement du mouvement.

121. PROBLÈME. — *Si un point matériel décrit une ellipse sous l'action d'une force dirigée vers son centre, cette force sera proportionnelle à la distance du point au centre fixe.*

En désignant par a et b les demi axes de l'ellipse, l'équation polaire de la courbe est :

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin^2 \theta.$$

Pour déterminer la force φ nous ferons usage de la formule (4) ou de la formule (7). Or, on a :

$$\frac{1}{r} \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin \theta \cos \theta \,;$$

d'ailleurs, de l'équation de la courbe on tire :

$$\sin^2 \theta = \frac{b^2 (a^2 - r^2)}{(a^2 - b^2) r^2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{a^2 (r^2 - b^2)}{(a^2 - b^2) r^2};$$

par suite,

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{a^2 b^2 r^2},$$

d'où :

$$\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}{a^2 b^2 r^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}.$$

Par conséquent,

$$v^2 = c^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}\right),$$

et la formule (4) nous donne :

$$\varphi = \frac{c^2 r}{a^2 b^2}.$$

Ainsi donc, *la force émanant du centre sera proportionnelle à la distance au centre, et elle sera attractive, puisque la valeur de* φ *est positive.*

122. PROBLÈME. — *Un point matériel décrit une section conique sous l'action d'une force dont la direction passe constamment par un foyer de cette courbe. Trouver l'expression de cette force.*

L'équation polaire de la courbe est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

p étant le demi paramètre, e l'excentricité. La courbe est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'on a :

$$e < 1, \quad e > 1, \quad \text{ou } e = 1.$$

Or, de l'équation de la courbe on tire :

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p},$$

d'où :

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e \cos \theta}{p};$$

par suite,

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1 + e\cos\theta}{p} - \frac{e\cos\theta}{p} = \frac{1}{p},$$

et, par conséquent, la formule (7) nous donne :

$$\varphi = \frac{c^2}{pr^2}.$$

On voit que *la force est attractive, puisque la valeur de φ est positive, et qu'elle est en raison inverse du carré de la distance au foyer.*

123. Problème. — *Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par une force dirigée vers un centre fixe, et dont l'intensité varie en raison inverse du carré de la distance du point au centre fixe.*

La force accélératrice sera donc égale à $\frac{\mu}{r^2}$. Observons que si le centre d'attraction est mobile, on peut ramener le problème au cas du mouvement d'un point autour d'un centre fixe. C'est ce que l'on fait dans le mouvement d'une planète autour du Soleil, si l'on tient compte de l'action de la planète sur le Soleil. En effet, soient M la masse du centre d'action, par exemple le Soleil, m la masse du point attiré, par exemple une planète. Le point m est attiré par le point M par une force accélératrice $\frac{M}{r^2}$, dirigée de m vers M ; le point M est attiré par le point m par une force accélératrice $-\frac{m}{r^2}$, dirigée de M vers m, c'est-à-dire en sens contraire de la précédente. Or, on pourra considérer le point M comme fixe, à la condition

d'introduire au point m et au point M une force égale et contraire à la force $-\frac{m}{r^2}$. Le point m est alors sollicité par les deux forces de même sens $\frac{M}{r^2}$ et $\frac{m}{r^2}$, dirigées de m vers M, et le point M est ramené au repos. Si donc nous posons $M + m = \mu$, nous pourrons considérer le centre d'attraction comme fixe, et le point m comme sollicité par la force accélératrice $\frac{\mu}{r^2}$, dirigée vers le centre fixe.

Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}. \qquad (1)$$

Le principe des aires nous donne l'intégrale première :

$$r^2 d\theta = c dt, \qquad (2)$$

dans laquelle la constante c, d'après ce que nous avons vu (n° **116**), a pour valeur $r_0 v_0 \sin\alpha$, en désignant par r_0 et v_0 les valeurs initiales de r et v, et par α l'angle que la vitesse initiale fait avec le rayon vecteur mené de la position initiale du mobile au centre fixe.

L'intégrale des forces vives nous donne l'équation :

$$v^2 = h + 2\int (X dx + Y dy) = h - 2\int \frac{\mu}{r^2}\, dr,$$

d'où :

$$v^2 = h + \frac{2\mu}{r},$$

équation dans laquelle on a :

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}. \qquad (3)$$

Nous aurons donc une seconde intégrale première :

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = h + \frac{2\mu}{r},$$

ou bien :

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = h + \frac{2\mu}{r}. \qquad (4)$$

En éliminant *dt* entre les équations (2) et (4), il vient :

$$c^2 \frac{dr^2}{r^4 d\theta^2} + \frac{c^2}{r^2} = h + \frac{2\mu}{r}. \qquad (5)$$

C'est *l'équation différentielle de la trajectoire.*

On serait d'ailleurs arrivé au même résultat au moyen de l'équation (7) (n° **119**) en y faisant $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$.

124. De l'équation (5) on tire :

$$d\theta = \pm \frac{cdr}{r\sqrt{-c^2 + 2\mu r + hr^2}};$$

on prendra le signe + dans le second membre, lorsque r croît quand θ augmente, car alors $d\theta$ et dr sont de même signe ; au contraire, on prendra le signe —, si r décroît quand θ augmente, puisqu'alors dr et $d\theta$ sont de signes contraires.

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'à partir de la position initiale correspondant à $r = r_0$, les rayons commencent par croître, et nous prendrons donc le signe +. Nous aurons l'équation :

$$d\theta = \frac{c\,dr}{r\sqrt{-c^2 + 2\mu r + hr^2}}. \qquad (6)$$

Pour intégrer cette équation, remplaçons les constantes c et h par d'autres qui faciliteront la solution.

Si l'on pose :

$$hr^2 + 2\mu r - c^2 = 0,$$

cette équation a ses deux racines réelles : en effet, pour $r = 0$, le premier membre est négatif, et il est d'ailleurs positif pour d'autres valeurs de r, sans cela $\frac{dr}{d\theta}$ ne serait jamais réel : Désignons ces deux racines par $a(1 - e)$ et $a(1 + e)$. Nous pouvons observer que ces deux racines sont les deux valeurs minimum et maximum du rayon vecteur r, puisqu'elles donnent $\frac{dr}{d\theta} = 0$. C'est donc en passant par ces valeurs de r que dr change de signe.

De ce que les deux racines de l'équation du second degré sont égales à $a(1 - e)$ et $a(1 + e)$, on tire :

$$h = -\frac{\mu}{a}, \quad c = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}. \qquad (7)$$

L'équation (6) devient alors :

$$d\theta = \frac{-d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{1}{r^2} + \frac{2}{ar(1 - e^2)} - \frac{1}{a^2(1 - e^2)}}};$$

on en tire, en intégrant,

$$\theta = \alpha + \text{arc cos} \frac{1}{e}\left(\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right),$$

et, par conséquent,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}.$$

On voit donc *que la trajectoire décrite par le mobile est une section conique ayant le centre d'attraction pour l'un de ses foyers.* D'ailleurs, la constante e n'est autre que l'excentricité de cette courbe qui sera donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'on aura :

$$e < 1, \quad e > 1, \quad \text{ou} \quad e = 1.$$

Or, des formules :

$$c = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}, \quad h = -\frac{\mu}{a},$$

on tire :

$$\frac{c^2}{\mu} = a(1 - e^2) = -\frac{\mu}{h}(1 - e^2);$$

d'où :

$$\frac{c^2 h}{\mu^2} + 1 = e^2,$$

ou bien :

$$e = \sqrt{1 + \frac{c^2 h}{\mu^2}}.$$

Par conséquent, on aura :

$$e < 1, \quad e > 1, \quad \text{ou} \quad e = 1,$$

suivant que l'on aura :

$$h < 0, \quad h > 0, \quad \text{ou} \quad h = 0.$$

Mais, on a :

$$h = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0};$$

donc, la trajectoire sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que l'on aura :

$$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \quad v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}, \quad \text{ou } v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}.$$

Il résulte de là que l'espèce de courbe dépend seulement de la *grandeur* de la vitesse initiale, et non de sa direction.

125. Pour obtenir la loi du mouvement sur la trajectoire, observons que les équations (2) et (6) nous donnent, en ayant égard aux formules (7) :

$$dt = \frac{rdr}{\sqrt{-\frac{\mu r^2}{a} + 2\mu r - \mu a(1 - e^2)}}.$$

On pourrait intégrer le second membre au moyen d'un arc de cercle; mais, la formule ainsi obtenue serait peu favorable pour le calcul de r en fonction de t.

Pour intégrer plus facilement, observons que r étant compris entre $a\ (1 - e)$ et $a\ (1 + e)$, on peut poser :

$$r = a\ (1 - e \cos u),$$

u étant une variable auxiliaire.

Nous aurons alors :

$$dt = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}}\ (1 - e \cos u)\ du,$$

et, si l'on pose :

$$\frac{\sqrt{\mu}}{a\sqrt{a}} = n,$$

il vient :

$$ndt = (1 - e \cos u)\ du,$$

d'où, en intégrant,

$$nt = u - e \sin u.$$

On n'ajoutera pas de constante, si l'on suppose $u = 0$, pour $t = 0$, c'est-à-dire si l'on compte le temps à partir de l'instant où le rayon vecteur est minimum, et égal à $a\ (1 - e)$. Quand il s'agit du mouvement d'une planète, ce point s'appelle le *périhélie ;* le point diamétralement opposé, pour lequel le rayon vecteur est égal à $a\ (1 + e)$ est l'*aphélie*.

126. Remarque. — En comparant les deux valeurs de r :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \alpha)},$$

$$r = a(1 - e\cos u),$$

on voit facilement que, pour $\theta = \alpha$, on a $r = a(1 - e)$, et $u = 0$.

Si l'on comptait les angles θ à partir de la droite qui va du foyer au périhélie, on aurait $\alpha = 0$, et, dans ce cas, il vient :

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}.$$

Alors l'angle u passe en même temps que θ par les valeurs 0, π, 2π,... On l'appelle l'*anomalie excentrique* de la planète, θ est l'*anomalie vraie*.

127. La formule :

$$nt = u - e\sin u,$$

sert à déterminer u en fonction de t, et, par suite, au moyen de la formule :

$$r = a(1 - e\cos u),$$

on aurait r en fonction de t.

D'autre part, en égalant les deux valeurs de r, on obtiendra une relation entre θ et u. Nous aurons :

$$1 - e\cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta},$$

d'où l'on tire :

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u};$$

par conséquent,

$$1 + \cos\theta = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1 - e\cos u},$$

$$1 - \cos\theta = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1 - e\cos u},$$

et, en divisant,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u.$$

Cette formule donnera θ en fonction de t, lorsque u aura été déterminé en fonction de t.

Comme on le voit, le calcul des coordonnées r et θ en fonction de t serait très pénible. On évite ces difficultés en employant les développements en séries procédant suivant les puissances de e. C'est ce qui constitue le *problème de Képler*.

128. Remarque. — La durée T de la révolution de la planète est donnée par la formule :

$$nt = u - e\sin u;$$

en y faisant $u = 2\pi$, il vient :

$$n\mathrm{T} = 2\pi,$$

d'où :

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}.$$

129. Cette formule nous permet de démontrer la *troisième loi de Képler*. En effet, si l'on néglige la masse m de la planète, comparativement à la masse M du soleil, on pourra remplacer μ par M, et on a alors :

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}};$$

pour une autre planète, on a de même :

$$T' = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}}.$$

On en tire :

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3},$$

ce qui est la troisième loi de Képler à savoir que *les carrés des temps des révolutions de deux planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites.*

130. La vitesse en chaque point de la trajectoire est donnée par la formule :

$$v^2 = h + \frac{2\mu}{r},$$

et, en remplaçant h par sa valeur $-\frac{\mu}{a}$, il vient :

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Problème de Képler.

131. Proposons-nous de trouver les développements des coordonnées polaires r et θ d'une planète en fonction du temps.

A cet effet, nous devons appliquer une *formule de Lagrange* que nous croyons utile de rappeler d'abord.

Soient u une fonction de ζ et de e, définie par l'équation :

$$u = \zeta + e\varphi(u),$$

e étant une quantité très petite, et $F(u)$ une fonction quelconque de la variable u. Le développement de $F(u)$ suivant les puissances ascendantes de e sera donné par la formule suivante[1] :

$$F(u) = F(\zeta) + \frac{e}{1}F'(\zeta)\varphi(\zeta) + \frac{e^2}{1\,.\,2}\frac{d}{d\zeta}[F'(\zeta)\varphi(\zeta)^2] + \dots + \frac{e^m}{1\,.\,2\dots m}\frac{d^{m-1}}{d\zeta^{m-1}}[F'(\zeta)\varphi(\zeta)^m] + \dots \quad \text{(A)}$$

1. Bertrand. *Traité de calcul différentiel*. 1864. p. 312 et suivantes

En particulier, pour obtenir le développement de u suivant les puissances de e, il faudra faire $F(u) = u$, et il vient alors :

$$u = \zeta + \frac{e}{1}\varphi(\zeta) + \frac{e^2}{1 \, . \, 2}\frac{d\varphi(\zeta)^2}{d\zeta} + \frac{e^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}\frac{d^2\varphi(\zeta)^3}{d\zeta^2} + \dots \quad \text{(B)}$$

132. Cela posé, si l'on veut obtenir le développement de l'*anomalie excentrique* u, qui est donnée par la formule :

$$u = \zeta + e \sin u, \qquad (1)$$

dans laquelle on a posé $\zeta = nt$, il faudra appliquer la formule (B), en posant :

$$\varphi(u) = \sin u, \quad \varphi(\zeta) = \sin \zeta,$$

et nous aurons, en conservant la lettre ζ pour simplifier les notations :

$$u = \zeta + e \sin \zeta + \frac{e^2}{1 \, . \, 2}\frac{d \sin^2 \zeta}{d\zeta} + \frac{e^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}\frac{d^2 \sin^3 \xi}{d\zeta^2} + \dots$$

Or, si nous remplaçons les puissances des sinus par les sinus et les cosinus des multiples de ζ, et si nous effectuons les différentiations indiquées, il vient, en remplaçant ensuite ζ par nt, et nous arrêtant aux cinquièmes puissances de e :

$$\begin{aligned} u = nt + e \sin nt + \frac{e^2}{2}\sin 2nt + \frac{e^3}{2^3}(3 \sin 3nt - \sin nt) \\ + \frac{e^4}{2 \, . \, 3}(2 \sin 4nt - \sin 2nt) + \frac{e^5}{2^7 \, . \, 3}(5^3 \sin 5nt - 3^4 \sin 3nt + 2 \sin nt). \end{aligned} \qquad (2)$$

133. Pour obtenir l'expression du *rayon vecteur* r, qui est donnée par la formule :

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u, \qquad (3)$$

nous appliquerons la formule (A) en posant :

$$F(u) = 1 - e\cos u, \quad F(\zeta) = 1 - e\cos\zeta, \quad F'(\zeta) = e\sin\zeta, \quad \varphi(\zeta) = \sin\zeta,$$

et nous aurons :

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\zeta + e^2\sin^2\zeta + \frac{e^3}{1.2}\frac{d\sin^3\zeta}{d\zeta} + \frac{e^4}{1.2.3}\frac{d^2\sin^4\zeta}{d\zeta^2} + \ldots$$

En remplaçant les puissances des sinus par les sinus et cosinus des multiples de ζ, effectuant les différentiations indiquées, et remplaçant enfin ζ par nt, il vient, en s'arrêtant aux cinquièmes puissances de e :

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos nt - \frac{e^2}{2}(\cos 2nt - 1) - \frac{e^3}{2.2^2}(3\cos 3nt - 3\cos nt)$$

$$- \frac{e^4}{2.3.2^3}(4^2\cos 4nt - 4.2^2\cos 2nt) \qquad (4)$$

$$- \frac{e^5}{2.3.4.2^4}\left(5^3\cos 5nt - 5.3^3\cos 3nt + \frac{5.4}{1.2}\cos nt\right).$$

134. Pour obtenir le développement de *l'anomalie vraie* θ, qui est donnée par la formule :

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u, \qquad (5)$$

nous aurons à faire usage d'une autre formule due aussi à Lagrange et que nous allons démontrer.

Soit l'équation :

$$\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y,$$

et proposons-nous de trouver le développement de x en fonction de y.

En remplaçant les tangentes par les rapports des sinus et des cosinus, et ensuite les sinus et les cosinus par les exponentielles imaginaires, on trouve, en désignant par c la base des logarithmes népériens :

$$\frac{c^{x\sqrt{-1}} - c^{-x\sqrt{-1}}}{c^{x\sqrt{-1}} + c^{-x\sqrt{-1}}} = m\,\frac{c^{y\sqrt{-1}} - c^{-y\sqrt{-1}}}{c^{y\sqrt{-1}} + c^{-y\sqrt{-1}}},$$

ou bien :

$$\frac{c^{2x\sqrt{-1}} - 1}{c^{2x\sqrt{-1}} + 1} = m\,\frac{c^{2y\sqrt{-1}} - 1}{c^{2y\sqrt{-1}} + 1},$$

d'où l'on tire :

$$c^{2x\sqrt{-1}} = \frac{(m+1)\,c^{2y\sqrt{-1}} - (m-1)}{(m+1) - (m-1)\,c^{2y\sqrt{-1}}} = e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{1 - \lambda c^{-2y\sqrt{-1}}}{1 - \lambda c^{2y\sqrt{-1}}},$$

en posant :

$$\lambda = \frac{m-1}{m+1}.$$

Prenant les logarithmes des deux membres, nous aurons, en divisant par $2\sqrt{-1}$,

$$x = y + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[l.\left(1 - \lambda c^{-2y\sqrt{-1}}\right) - l.\left(1 - \lambda c^{2y\sqrt{-1}}\right)\right].$$

Si λ est moindre que l'unité, on pourra développer les logarithmes en séries, et il viendra, en remplaçant les exponentielles imaginaires par des sinus et des cosinus :

$$x = y + \lambda \sin 2y + \frac{\lambda^2}{2} \sin 4y + \frac{\lambda^3}{3} \sin 6y + \dots$$

135. Cette formule, qui a été donnée par Lagrange, est applicable à l'équation (5) : en effet, dans le cas actuel, on a :

$$m = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}};$$

par suite,

$$\lambda = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}},$$

et, par conséquent, λ est moindre que l'unité.

Nous aurons donc la formule :

$$\theta = u + 2\left[\lambda \sin u + \frac{\lambda^2}{2} \sin 2u + \frac{\lambda^3}{3} \sin 3u + \dots\right]. \quad (6)$$

Or, des formules (1) et (2) on tire :

$$\sin u = \frac{u - nt}{e} = \sin nt + \frac{e}{2}\sin 2nt + \frac{e^2}{2^3}(3\sin 3nt - \sin nt) + \ldots$$

On obtiendra sin $2u$, sin $3u$,... en appliquant la formule (A) dans laquelle on fera succesivement :

$$F(u) = \sin 2u, \quad \sin 3u, \ \ldots \ \varphi(u) = \sin u,$$

$$F(\zeta) = \sin 2\zeta, \quad \sin 3\zeta, \ \ldots \ \varphi(\zeta) = \sin \zeta,$$

et ensuite $\zeta = nt$.

Nous aurons ainsi :

$$\sin 2u = \sin 2nt + e(\sin 3nt - \sin nt) + e^2(\sin 4nt - \sin 2nt)$$

$$+ \frac{e^3}{2^3 . 3}(25\sin 5nt - 27\sin 3nt + 4\sin nt) + \ldots$$

$$\sin 3u = \sin 3nt + \frac{e}{2}(3\sin 4nt - 3\sin 2nt)$$

$$+ \frac{e^2}{2^3}(15\sin 5nt - 18\sin 3nt + 3\sin nt)$$

$$+ \frac{e^3}{4}(9\sin 6nt - 12\sin 4nt + 3\sin 2nt) + \ldots$$

Il ne reste plus maintenant qu'à développer les puissances de λ suivant celles de e. A cet effet, nous poserons :

$$1 + \sqrt{1 - e^2} = L, \qquad (7)$$

et nous aurons :

$$\lambda = e\mathrm{L}^{-1}.$$

Par conséquent, pour obtenir λ^p, il faudra développer L^{-p} suivant les puissances de e.

Mais, de la formule (7) on tire :

$$\mathrm{L}^2 - 2\mathrm{L} + 1 = 1 - e^2,$$

d'où :

$$\mathrm{L} = 2 - \frac{e^2}{\mathrm{L}}.$$

Or, nous pourrons développer L^{-p} suivant les puissances de e^2, en appliquant la formule (A) de Lagrange dans laquelle nous remplacerons e par e^2, et faisant :

$$u = \mathrm{L}, \quad \zeta = 2, \quad \varphi(u) = -\frac{1}{\mathrm{L}}, \quad \varphi(\zeta) = -\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{F}(u) = \mathrm{L}^{-p}, \quad \mathrm{F}'(u) = -\frac{p}{\mathrm{L}^{p+1}}, \quad \mathrm{F}(\zeta) = \frac{1}{2^p}, \quad \mathrm{F}'(\zeta) = -\frac{p}{2^{p+1}};$$

nous aurons ainsi :

$$\mathrm{L}^{-p} = \frac{1}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}}e^2 + \frac{p(p+3)}{2\,.\,2^{p+4}}e^4 + \frac{p(p+4)(p+5)}{2\,.\,3\,.\,2^{p+6}}e^6 + \dots;$$

par suite :

$$\lambda^p = \frac{e^p}{2^p} + \frac{p}{2^{p+2}}e^{p+2} + \frac{p(p+3)}{2\,.\,2^{p+4}}e^{p+4} + \frac{p(p+4)(p+5)}{2\,.\,3\,.\,2^{p+6}}e^{p+6} + \dots$$

Si maintenant nous substituons dans l'équation (6) les valeurs de u, $\sin u$, $\sin 2u$,... ainsi que les valeurs des différentes puissances de λ, nous aurons, en nous arrêtant aux cinquièmes puissances de e :

$$\theta = nt + 2e \sin nt + \frac{5}{4} e^2 \sin 2nt + \frac{e^3}{2^2 . 3} (13 \sin 3nt - 3 \sin nt)$$

$$+ \frac{e^4}{2^5 . 3} (103 \sin 4nt - 44 \sin 2nt)$$

$$+ \frac{e^5}{2^6 . 3 . 5} (1097 \sin 5nt - 645 \sin 3nt + 50 \sin nt).$$

LIVRE II.

DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

CHAPITRE PREMIER.

Théorie des moments d'inertie.

136. Avant d'aborder l'étude du mouvement des systèmes, nous allons considérer certaines intégrales définies qui jouent un rôle très important dans la théorie du mouvement des corps solides. Nous admettrons, comme nous l'avons fait dans la théorie des centres de gravité (I, n° **329**), que la matière qui compose un corps solide est distribuée d'une manière continue dans la totalité de l'espace occupé par le volume de ce corps. Cette hypothèse n'amènera aucune erreur appréciable dans les actions exercées sur les différentes parties du corps.

137. On appelle *moment d'inertie* d'un point matériel de masse *m par rapport à un axe*, le produit mr^2 de la masse de ce point par le carré de sa distance à l'axe.

Le *moment d'inertie d'un système de points matériels* de forme invariable par rapport à un axe est égal à la somme des moments d'inertie de ces différents points par rapport à l'axe. Si donc m, m', m'',... sont les masses des différents points, r, r', r'',... leurs distances à l'axe, le moment d'inertie du système sera :

$$mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \dots = \Sigma mr^2.$$

Si, au lieu de considérer des points massifs isolés, nous considérons un corps solide continu, *le moment d'inertie du corps par rapport à un axe* sera égal à la somme des moments d'inertie de ses éléments par rapport à cet axe.

Si donc on désigne par dm la masse d'un des éléments du corps, par r la distance de cet élément à l'axe, le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe sera :

$$\mathrm{I} = \int r^2 dm,$$

l'intégrale étant étendue au corps tout entier.

Remarque. — En désignant par du un élément de volume, de surface ou de ligne, suivant que le corps sera un volume, une surface ou une ligne, le moment d'inertie sera donné par la formule :

$$\mathrm{I} = \int \rho r^2 du,$$

ρ étant la densité au point x, y, z où se trouve l'élément du ; ρ sera donc une fonction de x, y, z.

On voit par ce qui précède que le moment d'inertie dépend seulement de la forme du corps et de la distribution de la matière dans ce corps. Il dépend de la position de la droite par rapport à laquelle on prend ce moment d'inertie.

138. INTERPRÉTATION MÉCANIQUE DU MOMENT D'INERTIE D'UN CORPS. — Soient ω la vitesse angulaire du mouvement de rotation du corps autour de l'axe, dm la masse d'un élément de ce corps, et r la distance de cet élément à l'axe. Pendant le temps infiniment petit dt, le point m décrira un arc infiniment petit mm' dans un plan perpendiculaire à l'axe.

La vitesse linéaire de l'élément dm au point m est $v = \omega r$, dirigée suivant la tangente à la circonférence de rayon r. La quantité de mouvement de cet élément est $\omega r dm$; c'est, comme on sait (I, n° **202**), la mesure de la force qu'il faudrait appliquer au point dm libre et au repos, pour lui communiquer la vitesse $v = \omega r$ pendant l'unité de temps. Le moment de cette quantité de mouvement ou de la force qu'elle mesure, par rapport à l'axe est égal (I, n° **233**) à la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe par la distance de cette projection à l'axe. Or, ici, la projection est la force elle-même ; donc, le moment de la force par rapport à l'axe est :

$$\omega r dm \,.\, r = \omega r^2 dm.$$

La somme des moments des quantités de mouvement du système sera donc égale à :

$$\int \omega r^2 dm = \omega \int r^2 dm.$$

Donc, le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe est égal à la somme des moments des

quantités de mouvement de tous les points du corps par rapport à l'axe pour une vitesse angulaire égale à l'unité.

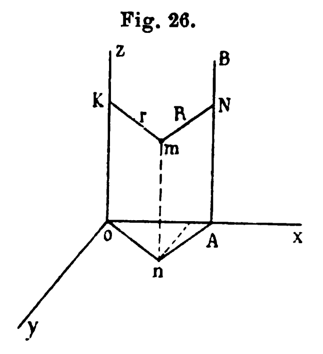
139. Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe OI étant calculé, il est évident que l'on peut toujours imaginer une longueur k, telle qu'en désignant par M la masse totale du corps, on ait :

$$\int r^2 dm = Mk^2.$$

Cette longueur k est ce que l'on appelle le *rayon de gyration* du corps par rapport à la droite OI. Il est facile de voir que cette longueur k n'est autre que le rayon d'un cylindre de révolution qui aurait la droite OI pour axe géométrique, et sur la surface duquel on supposerait la masse du corps répartie comme on voudra : en effet, le moment d'inertie de ce cylindre par rapport à l'axe OI serait égal à Mk^2.

140. PROBLÈME. — *Connaissant le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe, trouver le moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle au premier.*

Fig. 26.



Prenons le premier axe pour axe des z, et pour plan des zx le plan passant par les deux axes (fig. 26).

Soient m (x, y, z) un point du corps, dm sa masse, $mK = r$ et $mN = R$ ses distances aux deux axes, $OA = a$ la distance de ces axes.

Le moment d'inertie du corps par rapport à Oz est $\int r^2 dm$, et son moment d'inertie par rapport à AB est $\int R^2 dm$.

Or, on a :

$$R^2 = (x - a)^2 + y^2 = r^2 - 2ax + a^2 ;$$

par suite,

$$\int R^2 dm = \int r^2 dm - 2a \int x dm + a^2 \int dm.$$

Mais, en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité du corps, et par M la masse du corps, on a (I, n° **323**) :

$$M = \int dm, \quad Mx_0 = \int x dm ;$$

par conséquent,

$$\int R^2 dm = \int r^2 dm - 2aMx_0 + Ma^2.$$

141. Cas particulier. — Si l'axe des z passe par le centre de gravité du corps, on a : $x_0 = 0$, et il vient :

$$\int R^2 dm = \int r^2 dm + Ma^2.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe parallèle*

passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse entière du corps par le carré de la distance des deux axes.

Corollaires. — De la formule précédente on conclut que *le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe passant par son centre de gravité est moindre que pour tout autre axe parallèle à celui-ci.*

On en conclut aussi que *le moment d'inertie n'a pas de maximum*, puisqu'il augmente indéfiniment avec a.

Enfin, si a est constant, le moment d'inertie reste constant.

Donc, *le moment d'inertie est constant pour tous les axes parallèles et également éloignés d'un axe passant par le centre de gravité.*

Remarque. — On peut encore démontrer la formule précédente comme suit :

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité G, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz ; menons par le centre de gravité trois axes Gx_1, Gy_1, Gz_1 parallèles aux axes coordonnés.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point m du corps par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce même point par rapport aux axes Gx_1, Gy_1, Gz_1 ; désignons par I le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe Oz, et par I_g son moment d'inertie par rapport à Gz_1. Nous aurons :

$$I = \int (x^2 + y^2)\, dm ;$$

Or,

$$x = x_1 + x_0,$$

$$y = y_1 + y_0 ;$$

par suite,

$$I = \int \{ (x_1 + x_0)^2 + (y_1 + y_0)^2 \} dm$$

$$= \int (x_1^2 + y_1^2)\, dm + 2x_0 \int x_1\, dm$$

$$+ 2y_0 \int y_1 dm + (x_0^2 + y_0^2) \int dm.$$

Mais, le centre de gravité étant l'origine des coordonnées x_1, y_1, z_1, on a (I, n° **323**) :

$$\int x_1 dm = 0, \quad \int y_1 dm = 0\,;$$

par conséquent,

$$I = \int (x_1^2 + y_1^2)\, dm + M\,(x_0^2 + y_0^2),$$

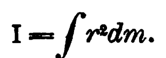
ou bien :

$$I = I_g + Mr_0^2,$$

en désignant par r_0 la distance des deux axes.

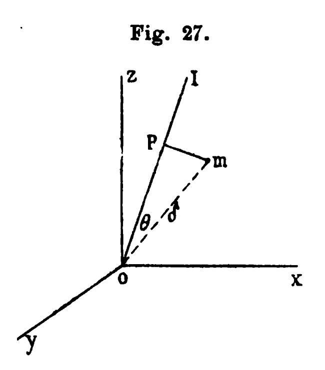
142. PROBLÈME. — *Trouver le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe* OI *passant par l'origine et faisant des angles* α, β, γ *avec les axes.*

Soient m (x, y, z) un point du corps (fig. 27), $m\mathrm{P} = r$ sa distance à l'axe OI. Nous aurons :



$$\mathrm{I} = \int r^2 dm.$$

Fig. 27.



Or, on a :

$$r^2 = \delta^2 \sin^2\theta = \delta^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

$$= x^2(1 - \cos^2\alpha) + y^2(1 - \cos^2\beta) + z^2(1 - \cos^2\gamma)$$

$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma,$$

ou bien, à cause de la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$r^2 = x^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) + z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)$$

$$- 2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma$$

$$= (y^2 + z^2)\cos^2\alpha + (z^2 + x^2)\cos^2\beta + (x^2 + y^2)\cos^2\gamma$$

$$- 2yz\cos\beta\cos\gamma - 2xz\cos\gamma\cos\alpha - 2xy\cos\alpha\cos\beta.$$

Remplaçons r^2 par cette valeur dans l'expression de I, et posons :

$$A=\int(y^2+z^2)dm,\quad B=\int(z^2+x^2)dm,\quad C=\int(x^2+y^2)dm,$$

$$D=\int yzdm,\quad E=\int xzdm,\quad F=\int xydm,$$

nous aurons :

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$
$$- 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Il est facile de voir que les quantités A, B, C sont les moments d'inertie du corps par rapport aux axes Ox, Oy, Oz ; quant aux quantités D, E, F on leur donne le nom de *produits d'inertie* par rapport à ces mêmes axes.

143. PROBLÈME. — *Trouver la loi suivant laquelle varie le moment d'inertie d'un corps par rapport à une droite quelconque* OI, *lorsque cette droite prend successivement toutes les positions possibles autour du point* O.

Soit I le moment d'inertie du corps par rapport à un axe OI, déterminé par les angles α, β, γ qu'il fait avec les axes. Nous aurons (n° **142**) :

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$
$$- 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Cela posé, prenons sur la droite OI, à partir du point O, une longueur $ON = \frac{1}{\sqrt{I}}$, et cherchons le lieu géométrique du point N ainsi obtenu.

En désignant par X, Y, Z les coordonnées du point N, et par ρ la distance ON, on a :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I}}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{\rho} = X\sqrt{I}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\rho} = Y\sqrt{I},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\rho} = Z\sqrt{I},$$

et, en substituant dans l'équation précédente, il vient :

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY.$$

Le lieu est donc une ***surface du second degré***, ayant pour centre le point O. D'ailleurs, comme le moment d'inertie I ne peut être nul pour aucune droite menée par le point O, le rayon vecteur ρ de cette surface ne peut jamais devenir infini. Par conséquent, la surface est un ***ellipsoïde***.

A chaque point de l'espace correspond un ellipsoïde analogue, qui fait connaître la ***loi de variation du moment d'inertie*** du corps par rapport aux différents axes menés par ce point. Cet ellipsoïde a reçu le nom d'***ellipsoïde d'inertie***. Poinsot l'appelle ***ellipsoïde central***.

D'ailleurs, de la formule :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{I}},$$

on tire :

$$I = \frac{1}{\rho^2}.$$

On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les moments d'inertie d'un corps par rapport à différents axes passant par une même origine sont inversement proportionnels aux carrés des rayons vecteurs d'un ellipsoïde d'inertie ayant cette origine pour centre.*

REMARQUE. — Si le corps se réduit à une surface plane, et si l'on prend les moments d'inertie de cette aire par rapport à tous les axes de son plan passant par un même point, l'ellipsoïde est remplacé par une ellipse que l'on appelle *ellipse d'inertie.*

Axes principaux d'inertie.

144. Il est évident que les coefficients A, B, C, D, E, F ont des valeurs qui dépendent du choix des axes coordonnés. Si l'on prend pour axes coordonnés les axes principaux de l'ellipsoide, les équations précédentes se simplifient.

En effet, les rectangles des variables disparaissant alors de l'équation de l'ellipsoïde, on a :

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0,$$

ou bien :

$$\int yzdm = 0, \quad \int xzdm = 0, \quad \int xydm = 0.$$

L'équation de l'ellipsoïde se réduit à la suivante :

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2.$$

On voit donc qu'il existe toujours un système d'axes tel que les trois intégrales D, E, F soient nulles.

Ce système étant celui des axes de l'ellipsoïde est *unique*, lorsque les trois axes de l'ellipsoïde sont inégaux. Ces trois axes s'appellent *axes principaux d'inertie* relatifs au point O, et les moments correspondants sont appelés *moments d'inertie principaux.*

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque passant par l'origine O sera donc, en désignant par α, β, γ les angles que cet axe fait avec les axes principaux, et par A, B, C les moments d'inertie principaux :

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma. \qquad (A)$$

145. Il résulte de ce que nous venons de voir que les axes principaux d'inertie pour un point O sont caractérisés par les trois relations :

$$\int yz\,dm = 0, \quad \int xz\,dm = 0, \quad \int xy\,dm = 0.$$

Si l'on considère seulement deux de ces relations, par exemple les deux premières, l'équation de l'ellipsoïde ne renfermera pas la variable z au premier degré. Par suite, les deux relations :

$$\int yz\,dm = 0, \quad \int xz\,dm = 0,$$

sont *les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'axe des z soit un axe principal du corps relatif au point O.*

146. *Si deux des moments principaux sont égaux*, par exemple si l'on a : A = B, l'*ellipsoïde* est *de révolution* autour de l'axe des z. Dans ce cas, les moments d'inertie relatifs à toutes les droites du plan des xy, c'est-à-dire à toutes les droites menées par le centre de l'ellipsoïde perpendiculairement à son axe

de révolution sont égaux entre eux. Toutes ces droites sont donc des axes principaux d'inertie, et les moments d'inertie relatifs à ces axes ont pour valeur A = B.

D'ailleurs, puisque pour un quelconque de ces axes on a : $\gamma = 90°$, la formule (A) (n° **144**) nous donne :

$$I = A(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = A.$$

147. Si les *trois moments principaux sont égaux*, c'est-à-dire si l'on a : A = B = C, l'*ellipsoïde* devient une *sphère*. Dans ce cas, tous les moments d'inertie sont égaux entre eux ; tous les axes sont des axes principaux ; une droite quelconque menée par le point O sera un axe principal.

D'ailleurs on a alors pour le moment d'inertie relatif à un axe quelconque :

$$I = A(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A.$$

148. THÉORÈME. — *Si un axe est principal pour un point* O *pris sur sa direction, le produit d'inertie sera nul pour un axe quelconque situé dans le plan mené par le point* O *perpendiculairement à cet axe.*

Fig. 28.

En effet, si l'axe des z est principal pour le point O, nous aurons (n° **145**) :

$$\int yzdm = 0, \quad \int xzdm = 0.$$

Cela posé, soient (fig. 28) Ox' une droite quelconque menée dans le plan des xy par le point O, φ l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, et x', y' les coordonnées

d'un point m du corps par rapport aux axes Ox' et Oy'. Nous aurons :

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

$$y' = - x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Par suite, le produit d'inertie relatif à l'axe Ox' sera :

$$\int x'z\,dm = \cos \varphi \int xz\,dm + \sin \varphi \int yz\,dm = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

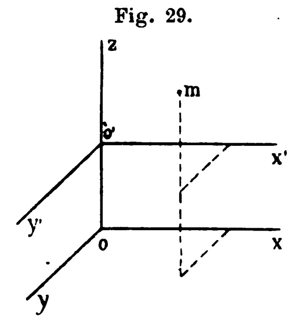
Réciproquement, un axe sera principal pour une origine O prise sur sa direction, lorsque le produit d'inertie sera nul pour un axe *quelconque* mené par le point O dans un plan perpendiculaire à cet axe.

En effet, si $\int x'z\,dm = 0$, *quel que soit l'angle* φ, il résulte de la formule précédente que l'on aura :

$$\int xz\,dm = 0, \quad \int yz\,dm = 0.$$

149. THÉORÈME. — *Si un axe est principal pour une origine* O, *il n'existe pas, en général, d'autre point pris sur sa direction pour lequel il soit principal.*

Fig. 29.



En effet, si l'axe Oz est principal pour l'origine O, on a :

$$\int xz\,dm = 0, \quad \int yz\,dm = 0.$$

Soit O' un point pris sur l'axe Oz (fig. 29), et posons $OO' = c$; par le point O' menons deux axes $O'x'$, $O'y'$ parallèles à Ox et Oy, et cherchons les deux intégrales :

$$\int x'z'\,dm, \quad \int y'z'\,dm.$$

Nous aurons : $x = x'$, $y = y'$, $z = z' + c$; par suite,

$$\int x'z'\,dm = \int x\,(z - c)\,dm = \int xz\,dm - c\mathrm{M}x_0,$$

$$\int y'z'\,dm = \int y\,(z - c)\,dm = \int yz\,dm - c\mathrm{M}y_0,$$

x_0, y_0, z_0 étant les coordonnées du centre de gravité du corps.

On a donc :

$$\int x'z'\,dm = - c\mathrm{M}x_0,$$

$$\int y'z'\,dm = - c\mathrm{M}y_0.$$

Or, en général, x_0, y_0 ne sont pas nuls ; par conséquent, les produits d'inertie $\int x'z'dm$ et $\int y'z'dm$ ne sont pas nuls, et, par suite, l'axe des z n'est pas principal pour le point O'.

En particulier, si l'axe Oz passe par le centre de gravité du corps, on aura : $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, et, par conséquent,

$$\int x'z'\,dm = 0, \quad \int y'z'\,dm = 0,$$

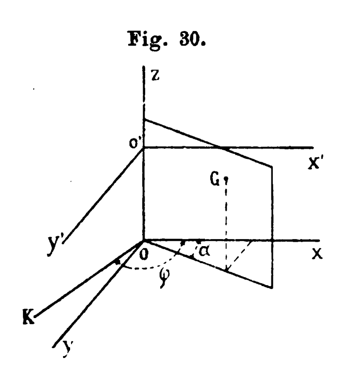
quel que soit c.

Donc, *un axe principal du centre de gravité est principal pour toutes les origines prises sur sa direction.*

150. Problème. — *Une droite quelconque étant donnée, on demande de déterminer si cette droite admet une origine prise sur sa direction pour laquelle elle devient axe principal.*

Prenons la droite pour axe des z (fig. 30), et deux droites Ox et Oy pour axes des x et des y. Par hypothèse, l'axe Oz n'est pas principal pour l'origine O : par conséquent, $\int xzdm$ et $\int yzdm$ sont différents de zéro.

Fig. 30.



Cherchons s'il existe un point O′ pour lequel cette droite Oz soit un axe principal, et menons par ce point deux axes $O'x'$ et $O'y'$ parallèles à Ox et Oy. Si l'axe des z est principal pour l'origine O′, nous devrons avoir :

$$\int x'z'dm = 0, \quad \int y'z'dm = 0.$$

Or, en désignant par c la distance OO′, on a (n° **149**)

$$\int x'z'dm = \int xzdm - cMx_0,$$

$$\int y'z'dm = \int yzdm - cMy_0.$$

Nous aurons donc deux équations :

$$\int xzdm - cMx_0 = 0,$$

$$\int yzdm - cMy_0 = 0,$$

pour déterminer l'inconnue c. Par conséquent, le problème est impossible, à moins que l'on n'ait :

$$\frac{\int xz\,dm}{x_0} = \frac{\int yz\,dm}{y_0},$$

ou bien :

$$y_0\int xz\,dm - x_0\int yz\,dm = 0. \qquad \text{(B)}$$

Telle est la condition qui doit être vérifiée pour que l'axe Oz puisse être principal pour un point O′ pris sur sa direction. Ce point O′ sera alors déterminé par la formule :

$$c = \frac{\int xz\,dm}{\mathrm{M}x_0} = \frac{\int yz\,dm}{\mathrm{M}y_0}.$$

Il est facile de voir que l'équation (B) exprime que le produit d'inertie est nul par rapport à un axe OK mené par le point O perpendiculairement au plan passant par la droite et le centre de gravité du corps.

En effet, désignons par K le produit d'inertie par rapport à cette droite OK, et soit φ l'angle que cette droite fait avec l'axe Ox ; nous aurons (nº **148**) :

$$\mathrm{K} = \cos\varphi\int xz\,dm + \sin\varphi\int yz\,dm.$$

Or, comme $\varphi = 90^\circ + \alpha$, on a :

$$\cos\varphi = -\sin\alpha = -\frac{y_0}{r_0}, \quad \sin\varphi = \cos\alpha = \frac{x_0}{r_0},$$

en désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité, et par r_0 sa distance à l'axe Oz. Par conséquent,

$$K = -\frac{y_0}{r_0}\int xz\,dm + \frac{x_0}{r_0}\int yz\,dm,$$

et la condition (B) nous donne K = 0.

Donc, *pour qu'une droite quelconque qui n'est pas un axe principal pour une origine* O *prise sur sa direction, le devienne pour une autre origine* O', *il faut que le produit d'inertie soit nul par rapport à un axe mené par le point* O *perpendiculairement au plan passant par la droite et le centre de gravité du corps.*

151. Théorème. — *La somme des moments d'inertie d'un corps par rapport à trois axes rectangulaires partant d'un même point* O, *est constante et égale à la somme des moments principaux relatifs à ce même point.*

En effet, soient Ox, Oy, Oz les axes principaux du corps, et Ox', Oy', Oz' trois axes rectangulaires passant par le même point O, (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les angles que les derniers axes font avec les premiers.

En désignant par A', B', C' les moments d'inertie relatifs aux axes Ox', Oy', Oz', on a (n° **144**) :

$$A' = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

$$B' = A\cos^2\alpha' + B\cos^2\beta' + C\cos^2\gamma',$$

$$C' = A\cos^2\alpha'' + B\cos^2\beta'' + C\cos^2\gamma''.$$

En ajoutant, et ayant égard aux relations :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1,$$

$$\cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1,$$

$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1,$$

il vient :

$$A' + B' + C' = A + B + C,$$

et le théorème est démontré.

152. Propriété. — Lorsque les trois moments d'inertie principaux sont différents, si l'on suppose $A < B < C$, on aura toujours en désignant par I le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque :

$$I > A \quad \text{et} \quad I < C.$$

En effet, si dans la formule :

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

on remplace $\cos^2\alpha$ par sa valeur tirée de l'équation :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on trouve :

$$I = A(1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma) + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

ou bien :

$$I = A + (B - A)\cos^2\beta + (C - A)\cos^2\gamma;$$

par conséquent,

$$I > A.$$

Si, dans cette même formule, on remplace $\cos^2\gamma$ par sa valeur, il vient :

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta),$$

ou bien :

$$I = C - (C - A)\cos^2\alpha - (C - B)\cos^2\beta,$$

et par suite,

$$I < C.$$

Donc, *le moment d'inertie le plus grand est le moment principal maximum, et il correspond au plus petit axe de l'ellipsoïde. Le moment d'inertie le plus petit est le moment principal minimum, et il correspond au grand axe de l'ellipsoïde.*

C'est d'ailleurs ce qui résulte de la propriété que le moment d'inertie par rapport à un axe est en raison inverse du carré du rayon vecteur correspondant de l'ellipsoïde central (n° **143**).

153. PROPRIÉTÉ. — *Le lieu des axes par rapport auxquels le moment d'inertie est égal au moment d'inertie moyen principal* B *se compose de deux plans également inclinés sur le plan des xy, et passant par l'axe moyen de l'ellipsoïde.*

En effet, le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque (α, β, γ) est donné par la formule :

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma\,;$$

faisant dans cette formule I = B, il vient :

$$B = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$

ou bien :

$$B = A \cos^2 \alpha + B (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma) + C \cos^2 \gamma.$$

On en tire :

$$(B - A) \cos^2 \alpha = (C - B) \cos^2 \gamma;$$

d'où :

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} = \pm \sqrt{\frac{C - B}{B - A}}.$$

Or, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque pris sur l'axe (α, β, γ), on a :

$$\frac{x}{z} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma},$$

et, en éliminant α, γ entre les deux dernières équations, on trouve pour l'équation du lieu :

$$\frac{x}{z} = \pm \sqrt{\frac{C - B}{B - A}}.$$

Cette équation représente deux plans passant par l'axe des y et également inclinés sur le plan des xy.

Remarque. — Cette propriété est d'ailleurs évidente, si l'on observe que le lieu des axes pour lesquels le moment d'inertie est égal à B n'est autre que le lieu des rayons vecteurs égaux à l'axe moyen de l'ellipsoïde. Or, ce lieu se compose, comme on sait, des sections circulaires de l'ellipsoïde.

154. Problème. — *Trouver le lieu des axes d'une même origine par rapport auxquels les moments d'inertie ont la même valeur.*

Le moment d'inertie par rapport à un axe (α, β, γ) est donné par la formule :

$$I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

ou bien :

$$(I - A)\cos^2\alpha + (I - B)\cos^2\beta + (I - C)\cos^2\gamma = 0.$$

Or, les équations de l'axe étant :

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma},$$

si l'on élimine α, β, γ entre ces dernières équations, il vient pour l'équation du lieu :

$$(I - A)x^2 + (I - B)y^2 + (I - C)z^2 = 0.$$

C'est un cône du second degré ayant son sommet à l'origine.

Applications.

155. 1° *Moment d'inertie d'une ligne droite homogène par rapport à un axe passant par une de ses extrémités et perpendiculaire à sa direction.*

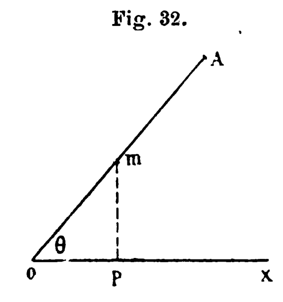
Fig. 31.

Soient $OA = a$ la longueur de la droite (fig. 31), dx un élément situé à une distance x de l'axe Oy ; nous aurons :

$$I = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

2° *Moment d'inertie d'une droite homogène par rapport à un axe passant par son extrémité et incliné d'un angle θ.*

Fig. 32.



Soit $OA = a$ la longueur de la droite : considérons un élément au point m de cette droite, et soient $Om = \rho$, $mp = y$ (fig. 32). Nous aurons :

$$I = \int_0^a y^2 d\rho ;$$

or, on a :

$$y = \rho \sin\theta ;$$

d'où :

$$I = \int_o^a \rho^2 \sin^2 \theta d\rho = \frac{a^3}{3} \sin^2 \theta.$$

3° *Moment d'inertie d'un rectangle par rapport à l'un de ses côtés.*

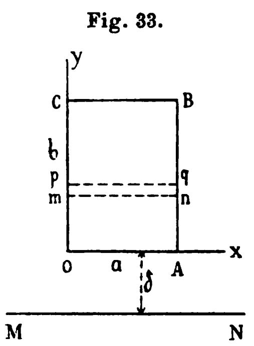


Fig. 33.

Soient a et b les longueurs des côtés que nous prendrons pour axes coordonnés. Considérons une tranche élémentaire *mnpq* (fig. 33), située à une distance y de l'axe des x : la surface de cette tranche est ady; sa distance à l'axe des x étant y, son moment d'inertie par rapport à Ox sera $ay^2\,dy$.

Nous aurons donc pour le moment d'inertie du rectangle par rapport à l'axe des x :

$$I = a \int_o^b y^2 dy = \frac{ab^3}{3}.$$

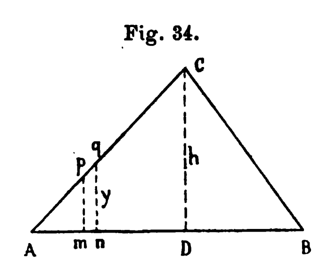
Si l'on veut obtenir le moment d'inertie de ce rectangle par rapport à un axe MN situé à une distance δ du côté a, nous aurons, en observant que ce moment est la différence des moments de deux rectangles ayant pour hauteurs $b + \delta$ et δ, et pour base a :

$$I = \frac{a}{3} \left\{ (b + \delta)^3 - \delta^3 \right\} = \frac{ab}{3} (b^2 + 3b\delta + 3\delta^2).$$

4° *Moment d'inertie d'un triangle par rapport à sa base.*

Soit un élément *mnpq* du triangle ACD (fig. 34) : le moment d'inertie de ce rectangle infinitésimal est $\frac{1}{3} y^3 dx$. Par conséquent, en posant AD $= a$, le moment d'inertie du triangle ACD sera $\frac{1}{3} \int_0^a y^3 dx$. Or, on a :

Fig. 34.



$$\frac{y}{h} = \frac{x}{a};$$

d'où :

$$y = \frac{h}{a} x,$$

et, par suite, le moment d'inertie du triangle ACD est :

$$\frac{1}{3} \frac{h^3}{a^3} \int_0^a x^3 dx = \frac{1}{12} ah^3;$$

de même, le moment d'inertie du triangle BCD est $\frac{1}{12} bh^3$, en posant BD $= b$. Le moment d'inertie du triangle ABC est donc :

$$I = \frac{1}{12} ah^3 + \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} h^3 (a + b) = \frac{1}{12} h^3 c,$$

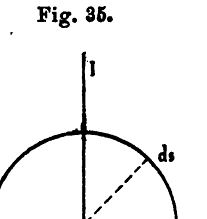
en désignant par c la longueur de la base AB.

Remarque. — Le moment d'inertie du triangle par rapport à un axe passant par son centre de gravité et parallèle à la base est (n° **141**) :

$$I_g = \frac{1}{12} ch^3 - \frac{1}{2} ch \cdot \frac{1}{9} h^2 = \frac{1}{36} ch^3.$$

5° *Moment d'inertie d'une circonférence de cercle par rapport à un axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan.*

Fig. 35.

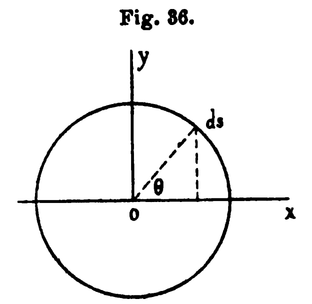


Soient r le rayon du cercle, ds la longueur d'un élément (fig. 35). Nous aurons :

$$I = \int_0^{2\pi r} r^2 ds = 2\pi r^3.$$

6° *Moment d'inertie d'une circonférence par rapport à son diamètre.*

Fig. 36.



Prenons le diamètre pour axe des x, et soit y la distance de l'élément ds à ce diamètre (fig. 36). Nous aurons :

$$I = \int y^2 ds ;$$

or, si l'on désigne par θ l'angle au centre, on a :

$$y = R \sin\theta, \quad ds = R d\theta.$$

Par conséquent,

$$I = \int_0^{2\pi} R^3 \sin^2\theta d\theta = R^3 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi R^3.$$

7° *Moment d'inertie d'une surface plane par rapport à une droite située dans son plan.*

En supposant la surface homogène, et en faisant la densité $\rho = 1$, nous aurons :

$$I = \int r^2 du = \int\int r^2 dx dy,$$

l'intégration se rapportant aux limites de la surface.

CAS PARTICULIER. — Si la droite est prise pour axe des x, nous aurons $r = y$, et il vient :

$$I = \int\int y^2 dx dy = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{x} (y^3 - y_0^3)\, dx.$$

8° *Moment d'inertie d'un cercle par rapport à un axe perpendiculaire à son plan.*

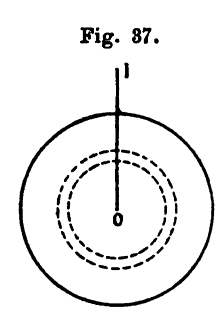


Fig. 37.

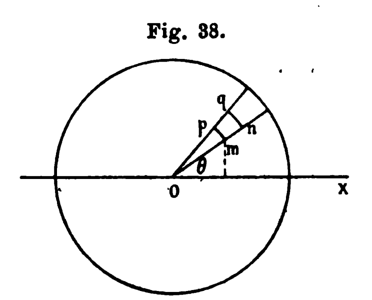
Considérons une bande comprise entre deux cercles de rayons ρ et $\rho + d\rho$ (fig. 37) : la surface de cette bande est $2\pi\rho d\rho$. Or, le moment d'inertie de cette bande étant égal à la somme des moments d'inertie de ses éléments, et tous ces éléments étant à la même distance ρ de l'axe OI, le moment d'inertie de la bande est $2\pi\rho d\rho \, . \, \rho^2 = 2\pi\rho^3 d\rho$. Par conséquent, le moment d'inertie du cercle est :

$$I = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2}.$$

9° *Moment d'inertie d'un cercle par rapport à son diamètre.*

Le moment d'inertie du cercle est égal à la somme des moments de ses éléments.

Fig. 38.



Considérons un élément *mnpq* (fig. 38) compris entre deux cercles de rayons ρ et $\rho + d\rho$ et deux rayons vecteurs consécutifs faisant des angles θ et $\theta + d\theta$ avec le diamètre : la surface de cet élément est $\rho d\rho d\theta$, et sa distance au diamètre est $\rho \sin \theta$. Le moment d'inertie de cet élément est donc $\rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta$. Par suite, le moment d'inertie du cercle est :

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^3 \sin^2 \theta d\rho d\theta = \frac{\pi r^4}{4}.$$

Remarque. — Le moment d'inertie d'une bande circulaire comprise entre deux cercles de rayons R et R' sera donc :

$$I = \frac{\pi (R^4 - R'^4)}{4}.$$

10° *Moment d'inertie d'une ellipse par rapport à l'un de ses axes.*

L'équation de l'ellipse est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

le moment d'inertie par rapport à l'axe des x est donné par la formule :

$$I = \int\int y^2 dx\, dy.$$

Nous prendrons le moment d'inertie du quart de l'aire de l'ellipse, et nous multiplierons le résultat par 4. Les limites de l'intégrale seront donc :

$$x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

et par suite,

$$I = 4\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy = \frac{4b^3}{3a^3}\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx.$$

Pour trouver cette dernière intégrale, posons $x = a \sin \varphi$, et nous aurons :

$$I = \frac{4ab^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi\, d\varphi = \frac{\pi ab^3}{4}.$$

Remarque. — Si l'on suppose $a = b$, il vient $I = \frac{\pi a^4}{4}$, ce qui est le moment d'inertie d'un cercle par rapport à son diamètre.

11° *Moment d'inertie d'un solide de révolution par rapport à son axe.*

Soient Ox l'axe de révolution (fig. 39), et AB la courbe génératrice, mP et m'P' deux ordonnées consécutives, $abcd$ un élément infinitésimal. Posons OP $= x$, P$a = u$; nous aurons :

Fig. 39.

$$abcd = du dx.$$

Le volume engendré par $abcd$ en tournant autour de Ox est $2\pi u du dx$, et le moment d'inertie de ce volume élémentaire est $2\pi u du dx \,.\, u^2 = 2\pi u^3 du dx.$

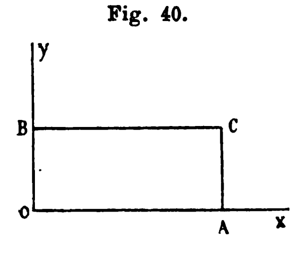
Par conséquent, le moment d'inertie du volume engendré par l'aire ABCD est :

$$I = 2\pi \int_{x_0}^{x} dx \int_{0}^{y} u^3 du = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x} y^4 dx.$$

12° *Moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe.*

On peut considérer le cylindre comme engendré par le rectangle OABC (fig. 40) tournant autour de l'axe des x.

Fig. 40.



Si donc on désigne par R le rayon OB de la base, et par h la hauteur, il vient :

$$I = 2\pi \int_{0}^{h} dx \int_{0}^{R} u^3 du = \frac{\pi R^4 h}{2}.$$

REMARQUE I. — On pouvait arriver à ce résultat en considérant le cylindre comme composé de tranches élémentaires perpendiculaires à l'axe. Le moment d'inertie d'une tranche d'épaisseur dx est égal à la somme des moments d'inertie de ses éléments, et chaque élément est un cercle perpendiculaire à l'axe du cylindre. Le moment d'inertie de la tranche sera donc égal à $\frac{\pi R^4}{2} dx$; par conséquent, pour le cylindre, nous aurons :

$$I = \frac{\pi R^4}{2} \int_0^h dx = \frac{\pi R^4 h}{2}.$$

REMARQUE II. — Le moment d'inertic d'une couche cylindrique comprise entre deux cylindres de rayons R et R', aura pour expression :

$$I = \frac{\pi h}{2} (R^4 - R'^4).$$

13° *Moment d'inertie d'un segment sphérique.*

Soit $x^2 + y^2 = R^2$ l'équation du cercle générateur, nous aurons :

$$I = 2\pi \int_{x_0}^{x} dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} u^3 du = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x} (R^2 - x^2)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x} (R^4 + x^4 - 2R^2 x^2) dx,$$

d'où :

$$I = \frac{\pi}{2} \left\{ R^4 (x - x_0) + \frac{x^5 - x_0^5}{5} - 2R^2 \frac{x^3 - x_0^3}{3} \right\}.$$

REMARQUE. — Si l'on suppose $x_0 = 0$, et $x = R$, on a pour le moment d'inertie de la demi sphère :

$$I = \frac{4\pi R^5}{15},$$

et pour la sphère entière :

$$I = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

14° *Moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle homogène par rapport à l'une de ses arêtes.*

Cherchons d'abord les moments d'inertie par rapport à trois axes Ox, Oy, Oz menés par le centre O parallèlement aux trois arêtes dont nous désignerons les longueurs par $2a$, $2b$, $2c$: à cause de la symétrie, ces trois axes sont des axes principaux.

Or, $dxdydz$ étant le volume d'un élément, le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz sera :

$$\int\int\int \rho\,(x^2 + y^2)\,dxdydz = \rho\int_{-a}^{+a} x^2dx\int_{-b}^{+b} dy\int_{-c}^{+c} dz$$

$$+ \rho\int_{-a}^{+a} dx\int_{-b}^{+b} y^2dy\int_{-c}^{+c} dz = \frac{8\rho abc}{3}(a^2 + b^2) = \frac{M\,(a^2 + b^2)}{3},$$

en désignant par M la masse du parallélipipède.

Nous aurons de même pour les deux autres moments d'inertie :

$$\frac{M\,(a^2 + c^2)}{3},\quad \frac{M\,(b^2 + c^2)}{3}.$$

Il s'ensuit que le moment d'inertie par rapport à l'arète parallèle à Oz est (n° **141**) :

$$\frac{M(a^2+b^2)}{3}+M(a^2+b^2)=\frac{4}{3}M(a^2+b^2).$$

Les moments d'inertie par rapport aux deux autres arètes sont :

$$\frac{4}{3}M(a^2+c^2),\quad \frac{4}{3}M(b^2+c^2).$$

CHAPITRE II.

Mouvement d'un système quelconque. Principe de d'Alembert.

156. Considérons un système de points matériels sollicité par des forces quelconques et se mouvant sous l'action de ces forces et des conditions auxquelles il est assujetti.

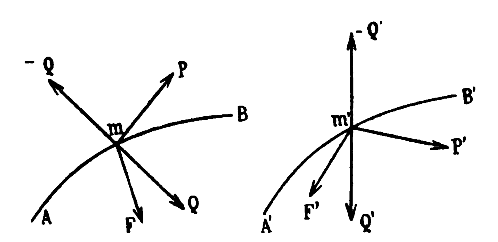
Les forces qui agissent sur les différents points se divisent en deux catégories : les *forces intérieures* et les *forces extérieures* (I, n° **244**).

Lorsque le système est de forme invariable, les forces intérieures sont deux à deux égales et directement opposées. A un autre point de vue, on divise aussi les forces en *forces données* et en *forces tenant lieu des liaisons*, celles-ci pouvant être *intérieures* ou *extérieures* (I, n° **380**). Il est évident que, si nous joignons aux forces motrices qui sollicitent le système, les forces qui tiennent lieu des liaisons (réactions des obstacles, etc.), le système pourra être considéré comme libre.

Nous pourrons donc appliquer à chacun des points du système les équations du mouvement d'un point libre, si nous tenons compte de toutes les forces extérieures ou intérieures qui agissent sur ce point.

Soient m un point du système (fig. 41), AB la trajectoire qu'il décrit dans son mouvement, P la force motrice qui le sollicite à la fin du temps t, F la force qui tient lieu des liaisons à cet instant. Il est évident que la trajectoire AB n'est pas la même que celle que décrirait le point m, s'il était libre, sous l'action de la

Fig. 41.



force P seule. Mais, il est évident aussi qu'il existe toujours une certaine force Q qui, étant appliquée au point *m libre*, lui ferait décrire la trajectoire AB, c'est-à-dire qui communiquerait au point m rendu libre, le mouvement qu'il possède réellement à la fin du temps t. C'est cette force Q que l'on appelle *la force effective* : la force — Q s'appelle *la force d'inertie.*

Cela posé, appliquons au point m les deux forces Q, — Q, égales et de sens contraires : le mouvement du point m ne sera pas changé par l'introduction de ces forces. Le point *m rendu libre* est donc sollicité par les forces P, F, Q, — Q. Or, la force Q seule produirait le mouvement réel du point m. Il en résulte que les trois forces P, F et — Q se font équilibre. On arriverait à des résultats analogues pour chacun des points du système, et l'on aura par conséquent le théorème suivant :

PRINCIPE DE D'ALEMBERT. — *Dans un système de points matériels en mouvement, il y a équilibre, à chaque instant, entre les forces motrices appliquées au système, les forces de liaisons et les forces d'inertie des différents points du système.*

157. Cela posé, nous pouvons rétablir les liaisons du système, en supprimant les forces F : l'équilibre continuera à subsister, en ayant égard aux liaisons, entre les forces P, P',... et les forces — Q, — Q',... Nous pourrons alors énoncer le théorème de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Dans un système de points matériels en mouvement, il y a équilibre, à chaque instant, en vertu des liaisons, entre les forces motrices appliquées au système et les forces d'inertie des différents points du système.*

Comme on le voit, le principe de d'Alembert a pour résultat de ramener la théorie du mouvement d'un système de points matériels à la théorie de l'équilibre.

158. REMARQUE. — On peut donner une autre forme au principe de d'Alembert de la manière suivante :

Nous pouvons décomposer la force P, appliquée au point *m* en deux forces, l'une égale à la force effective Q et une autre que nous appellerons la force R. Faisons la même opération en chacun des points *m*, *m'*,... du système. Puisque les forces Q, Q'... suffisent pour produire le mouvement de chacun des points du système, il en résultera qu'à chaque instant les forces R se feront équilibre au moyen des liaisons. Ces forces R, qui ne sont pas utilisées pour le mouvement, s'appellent *forces perdues*. Nous aurons alors le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Dans un système de points matériels en mouvement, il y a équilibre, à chaque instant, en vertu des liaisons, entre les forces perdues.*

159. Le principe de d'Alembert nous fournit *l'équation générale de la Dynamique.*

En effet, puisqu'il y a équilibre, *à chaque instant, au moyen des liaisons, entre les forces motrices et les forces d'inertie* des différents points du système, il en résulte (I, n° **384**) que la *somme des travaux virtuels de toutes ces forces doit être nulle, à chaque instant, pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons telles qu'elles existent à cet instant.*

Nous aurons donc, en désignant par δs le déplacement virtuel du point m :

$$\Sigma P\delta s \cos(P, \delta s) - \Sigma Q\delta s \cos(Q, \delta s) = 0,$$

le signe Σ s'étendant à tous les points du système, et les déplacements δs devant être compatibles avec les liaisons du système à l'instant considéré.

Cette équation peut être mise sous une autre forme. En effet, soient m la masse du point m, x, y, z ses coordonnées à la fin du temps t, X, Y, Z les composantes de la force P qui agit sur ce point à cet instant, δx, δy, δz les projections du déplacement virtuel δs sur les axes. Le travail virtuel de la force P est $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$; d'autre part, les composantes de la force d'inertie étant $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$, le travail virtuel de cette force sera :

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x - m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y - m\frac{d^2z}{dt^2}\delta z.$$

L'équation des travaux virtuels nous donne donc :

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

C'est *l'équation générale de la Dynamique*, ou *l'équation de Lagrange*. Il est bien entendu que les déplacements δx, δy, δz,... doivent être compatibles avec les liaisons du système *au moment considéré*.

160. REMARQUE I. — Nous devons observer ici qu'il y a une distinction à établir entre les signes Σ qui entrent dans l'équation de Lagrange, et dans l'équation des travaux virtuels (I, n° **384**).

Dans l'équation de Lagrange, le signe Σ se rapporte à toutes les masses de tous les points du système, même celles sur lesquelles aucune des forces données n'agit directement : c'est ce qui résulte de la manière dont cette équation a été établie.

Dans l'équation d'équilibre de la Statique :

$$\Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

le signe Σ ne se rapporte qu'aux points soumis à l'action des forces données : c'est aussi ce qui résulte de la manière dont cette équation a été établie (I, n° **382**).

REMARQUE II. — L'équation de Lagrange subsiste encore lorsque les masses mobiles, au lieu d'être concentrées en des points isolés, remplissent d'une manière continue un certain volume ; mais, dans ce cas, la masse m devra être remplacée par dm, et le signe Σ par une intégrale.

REMARQUE III. — Si le système est un *solide invariable libre,* il sera inutile de passer par l'équation des travaux virtuels. Il suffira d'écrire les six équations d'équilibre d'un nombre quelconque de forces appliquées à un solide invariable (I, n° **301**).

161. Nous allons voir maintenant comment l'équation de Lagrange conduit aux *équations différentielles du mouvement d'un système, lorsque les liaisons entre les n points du système sont exprimées par des équations de condition entre les 3n coordonnées de ces n points et le temps t.* Observons d'abord que, puisqu'il y a n points, on a à déterminer $3n$ coordonnées en fonction de t, ce qui exige la connaissance de $3n$ équations entre ces coordonnées et le temps.

L'équation du mouvement est :

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \quad (1)$$

Soient :

$$\left.\begin{array}{l} L_1\,(t, x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0, \\ L_2\,(t, x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_k\,(t, x, y, z, x', y', z', \ldots) = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

les k équations de condition auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des n points du système. Puisque *le déplacement doit être compatible avec les liaisons*

du système telles qu'elles existent à l'instant considéré, il faut que les variations δx, δy, δz, $\delta x'$,... soient telles qu'en remplaçant x, y, z, x',... par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, $x' + \delta x'$,... *en laissant t constant*, dans les équations (2), ces équations soient encore vérifiées par les nouvelles coordonnées (I, n° **381**). On doit donc avoir les équations de condition :

$$L_1 + \delta L_1 = 0, \quad L_2 + \delta L_2 = 0, \ldots L_k + \delta L_k = 0.$$

Puisque ces dernières équations doivent être vérifiées en même temps que les équations (2), on en tire :

$$\delta L_1 = 0, \quad \delta L_2 = 0, \ldots \delta L_k = 0,$$

en ayant soin de traiter le temps t comme une constante dans les différentiations relatives à la caractéristique δ.

Nous aurons donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_1}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L_1}{\partial x'}\delta x' + \ldots = 0,\\
&\frac{\partial L_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_2}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L_2}{\partial x'}\delta x' + \ldots = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial L_k}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_k}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_k}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L_k}{\partial x'}\delta x' + \ldots = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

ce qui nous donne k équations entre les $3n$ variations δx, δy, δz...; au moyen de ces k équations on peut déterminer les valeurs de k variations en fonction

des $3n - k$ autres. En substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra une équation qui ne renfermera que $3n - k$ variations. Or, ces variations seront maintenant arbitraires, et l'équation qui les contient devra être vérifiée, quelles que soient les valeurs que l'on attribue à ces variations indéterminées. On devra donc égaler à zéro les coefficients de ces $3n - k$ variations, ce qui nous donnera $3n - k$ équations entre les $3n$ coordonnées x, y, z, x',... et le temps t. En joignant ces $3n - k$ équations aux k équations (2), nous aurons les $3n$ équations nécessaires et suffisantes pour déterminer les $3n$ coordonnées en fonction du temps. Les constantes arbitraires introduites par l'intégration se déterminent, comme toujours, au moyen des circonstances initiales du mouvement.

162. Observons que les opérations que nous venons de faire reviennent à éliminer k variations entre les équations (1) et (3). Or, cette élimination qui est, en général, très pénible, peut se faire par la *méthode des multiplicateurs*, laquelle présente, comme nous allons le voir, des avantages particuliers.

Multiplions les équations (3) respectivement par des facteurs indéterminés λ_1, λ_2,... λ_k, et ajoutons les résultats obtenus à l'équation (1). Nous obtiendrons ainsi une équation (L) renfermant les $3n$ variations δx, δy, δz... Comme, parmi ces $3n$ variations, il y en a k qui sont dépendantes des autres, nous disposerons des facteurs λ_1, λ_2,... λ_k, de manière à faire évanouir dans l'équation (L) les coefficients de ces k variations. Les $3n - k$ variations restantes étant *arbitraires*, leurs coefficients doivent être nuls séparément. On voit par là qu'il faut égaler à zéro les coefficients des $3n$ variations ce qui nous donnera les $3n$ équations suivantes :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial L_k}{\partial x},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial L_k}{\partial y},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial L_k}{\partial z}, \quad (4)$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x'} + \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x'} + \ldots + \lambda_k\frac{\partial L_k}{\partial x'},$$

. . . .

Entre ces $3n$ équations on éliminera les k multiplicateurs λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_k$, et l'on obtiendra les $3n - k$ équations à joindre aux équations (2) pour obtenir la solution du problème.

163. L'avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle fournit les *efforts que les liaisons produisent* sur chacun des points du système. En effet, chacune de ces équations (4) est l'équation du mouvement d'un point libre projeté sur l'un des axes coordonnés. Ainsi, les trois premières sont les équations du mouvement du point m considéré comme *libre*, sous l'action de la force donnée X, Y, Z et des k forces :

$$\left(\lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial x},\ \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial y},\ \lambda_1\frac{\partial L_1}{\partial z}\right),\ \left(\lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial x},\ \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial y},\ \lambda_2\frac{\partial L_2}{\partial z}\right), \ldots$$

$$\ldots\left(\lambda_k\frac{\partial L_k}{\partial x},\ \lambda_k\frac{\partial L_k}{\partial y},\ \lambda_k\frac{\partial L_k}{\partial z}\right).$$

La même remarque s'applique aux autres groupes de trois équations.

Il résulte de là que :

$$\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x}, \quad \lambda_2 \frac{\partial L_2}{\partial x}, \ldots \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x},$$

sont les composantes suivant l'axe des x des actions que les liaisons exercent sur le point m, et, par conséquent, les équations (4) nous donnent l'expression des forces qui pourront remplacer chacune de ces liaisons. Il est, en effet, évident que, si l'on supprimait la liaison $L_1 = 0$, rien ne serait modifié dans le mouvement, si l'on appliquait :

1° au point m une force ayant pour composantes :

$$\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z},$$

2° au point m' une force ayant pour composantes :

$$\lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial x'}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial y'}, \quad \lambda_1 \frac{\partial L_1}{\partial z'},$$

et ainsi de suite.

164. On conclut encore de là que la force à introduire en un point m (x, y, z), lorsque l'on supprime une liaison $L_1 = 0$, est normale à la surface représentée par l'équation $L_1 = 0$, dans laquelle on considérerait comme seules variables les coordonnées (x, y, z) de ce point, les coordonnées des autres points du système étant supposées constantes.

165. Remarque. — Le déplacement effectif que prend un système n'est pas toujours un déplacement compatible avec les liaisons à l'époque t. Cela ne peut avoir lieu que *si les liaisons ne renferment pas explicitement le temps.*

Nous avons vu (n° **161**) que, pour que le déplacement soit compatible avec les liaisons du système, il faut que les équations :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots L_k = 0,$$

qui sont vérifiées par les valeurs x, y, z,... soient aussi vérifiées par $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$,... *le temps t restant constant*. Nous devons donc avoir les équations :

$$\frac{\partial L_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_1}{\partial z}\delta z + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_2}{\partial z}\delta z + \ldots = 0,$$

. . . .

$$\frac{\partial L_k}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_k}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_k}{\partial z}\delta z + \ldots = 0.$$

Or, les déplacements effectifs (réels) dx, dy, dz,... ne satisfont pas, en général, à ces équations. En effet, dx, dy, dz,... sont les projections sur les axes de l'élément effectivement parcouru pendant le temps dt. Il en résulte que les équations :

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \ldots L_k = 0,$$

devront être vérifiées quand on y change t en $t + dt$, x en $x + dx$,... et nous aurons alors les équations :

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} dt + \frac{\partial L_1}{\partial x} dx + \frac{\partial L_1}{\partial y} dy + \frac{\partial L_1}{\partial z} dz + \ldots = 0.$$

$$\frac{\partial L_2}{dt} dt + \frac{\partial L_2}{\partial x} dx + \frac{\partial L_2}{\partial y} dy + \frac{\partial L_2}{\partial z} dz + \ldots = 0,$$

. . . .

$$\frac{\partial L_k}{\partial t} dt + \frac{\partial L_k}{\partial x} dx + \frac{\partial L_k}{\partial y} dy + \frac{\partial L_k}{\partial z} dz + \ldots = 0.$$

On voit donc que l'on ne pourra prendre :

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \ldots,$$

que si l'on a :

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial L_2}{\partial t} = 0, \ldots \frac{\partial L_k}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire *si le temps t n'entre pas explicitement dans les équations de liaisons.*

Applications.

166. PROBLÈME I. — *Trouver le mouvement d'un point matériel de masse m, assujetti à glisser sans frottement sur une courbe qui varie à chaque instant de position et même de forme.*

Soient :

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

les équations de la courbe ; X, Y, Z les composantes de la force motrice appliquée au point m.

L'équation de Lagrange nous donne :

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0;$$

des équations de liaisons on tire :

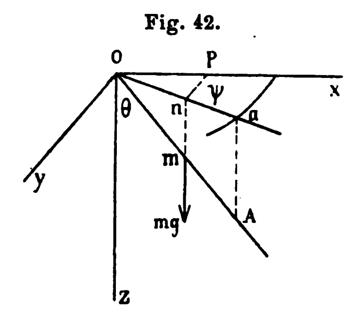
$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0.$$

En éliminant δx, δy, δz entre ces trois équations, on obtient une équation entre x, y, z, t, et en la joignant aux équations de la courbe, nous aurons trois équations pour déterminer x, y, z en fonction de t.

167. Problème II. — *Un point matériel pesant glisse sans frottement sur une droite rigide qui décrit un cône droit autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante* ω. *On demande de trouver le mouvement de ce point.*

Fig. 42.



Soient θ l'angle constant ZOA du cône (fig. 42), ψ l'angle compris entre le plan mobile ZOA et sa position initiale ZOX, r la distance Om. On a évidemment :

$$\psi = \omega t;$$

d'autre part, on a pour les équations de la droite mobile OA :

$$x = r \sin\theta \cos\omega t,$$

$$y = r \sin\theta \sin\omega t,$$

$$z = r \cos\theta.$$

Les composantes de la force motrice étant X = 0, Y = 0, Z = mg, l'équation de Lagrange nous donne :

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g\right)\delta z = 0.$$

Or, on a :

$$\delta x = \sin\theta \cos\omega t \,.\, \delta r,$$

$$\delta y = \sin\theta \sin\omega t \,.\, \delta r,$$

$$\delta z = \cos\theta\, \delta r\,;$$

on a aussi :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\cos\omega t - 2\omega\frac{dr}{dt}\sin\omega t - \omega^2 r\cos\omega t\right)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2}\sin\omega t + 2\omega\frac{dr}{dt}\cos\omega t - \omega^2 r\sin\omega t\right)\sin\theta,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta.$$

Par conséquent, en éliminant les dérivées et les variations de x, y, z, on obtient l'équation :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \sin^2\theta = g\cos\theta.$$

Cette équation linéaire du second ordre à coefficients constants a pour intégrale :

$$r = Ae^{\omega t \sin\theta} + Be^{-\omega t \sin\theta} - \frac{g\cos\theta}{\omega^2 \sin^2\theta}.$$

Pour déterminer les constantes, supposons que l'on ait $r_0 = 0$, et que v_0 soit la vitesse initiale du point sur la droite mobile. Nous aurons :

$$0 = A + B - \frac{g\cos\theta}{\omega^2\sin^2\theta}.$$

D'autre part, on a :

$$v_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = A\omega\sin\theta - B\omega\sin\theta.$$

De ces équations on tire :

$$A = \frac{g\cos\theta + \omega v_0 \sin\theta}{2\omega^2\sin^2\theta},$$

$$B = \frac{g\cos\theta - \omega v_0 \sin\theta}{2\omega^2\sin^2\theta}.$$

Connaissant r en fonction de t, nous pourrons déterminer x, y, z en fonction de t, et le problème sera résolu.

CHAPITRE III.

Des forces instantanées ou percussions.

168. On mesure une force constante (I, n° **202**) par la quantité de mouvement qu'elle communique pendant l'unité de temps à un point matériel libre pris à partir du repos. On a donc :

$$F = \frac{mv}{t}.$$

Il résulte de là que, pour une quantité de mouvement finie et déterminée produite par la force, la durée de l'action de cette force est d'autant moindre que l'intensité de la force est plus grande. Cette durée peut être très petite, pour ainsi dire inappréciable, lorsque l'intensité de la force est suffisamment grande. On peut admettre que la position du point n'a pas varié pendant la durée de l'action d'une telle force. Ainsi donc, l'effet de la force F très grande pendant une très courte durée sera de communiquer au point une vitesse finie v, sans faire parcourir à ce point un espace appréciable. Cette force s'appelle *force instantanée*, ou mieux *percussion*. Il est bon d'observer ici que l'expression de force instantanée, qui est consacrée par l'usage, est défectueuse : il n'y a pas, à proprement

parler, de force instantanée. En effet, aucune force ne peut imprimer une vitesse finie à une masse, quelque petite qu'elle soit, sans y mettre un certain temps et sans faire parcourir un certain espace à son point d'application. C'est pourquoi il serait préférable d'employer l'expression de *percussion* ou *impulsion*. Jacobi emploie l'expression de *force momentanée*.

169. Considérons une telle force P agissant sur un point matériel *libre* et *au repos*, *suivant une direction constante* Ox, pendant un temps très court θ. Nous aurons :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{P};$$

d'où, en intégrant entre les limites 0 et θ, et désignant par v la vitesse du point au bout du temps θ, il vient :

$$m \frac{dx}{dt} = mv = \int_0^\theta \mathrm{P}dt.$$

Il en résulte que la force instantanée P est mesurée par la quantité de mouvement finie qu'elle communique à un point libre pris à partir du repos.

Supposons ensuite que la *direction de la force instantanée* P *soit variable* pendant le temps θ très petit. Désignons par m la masse d'un point matériel *libre* sur lequel cette force agit *à partir du repos*, par x, y, z les coordonnées de ce point, par X, Y, Z les composantes de la force P au temps t, c'est-à-dire à un instant quelconque de la durée de l'action de la force. Nous aurons, pour cet instant, les trois équations :

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

et, en intégrant entre les limites 0 et θ :

$$m\frac{dx}{dt} = \int_0^\theta X dt, \quad m\frac{dy}{dt} = \int_0^\theta Y dt, \quad m\frac{dz}{dt} = \int_0^\theta Z dt,$$

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ étant les composantes de la vitesse acquise par le point m au bout du temps θ.

Or, les premiers membres de ces équations sont les composantes de la quantité de mouvement due à la force instantanée ; les seconds membres sont les composantes de l'impulsion totale de la force P. Donc, *l'impulsion totale d'une force instantanée* P *est représentée en grandeur et en direction par la quantité de mouvement qu'elle imprimerait à un point matériel libre et au repos.*

170. Remarque. — On peut encore dire que les expressions :

$$\int_0^\theta X dt, \quad \int_0^\theta Y dt, \quad \int_0^\theta Z dt,$$

sont les *composantes de la quantité de mouvement que la force instantanée* P (X, Y, Z) *communiquerait au point m libre et au repos.*

171. Il résulte de ce qui précède que, dans le cas où un système est soumis à des forces instantanées, il faudra transformer le principe de d'Alembert de manière à y introduire les impulsions totales de ces forces et les quantités de mouvement.

Extension du théorème de d'Alembert aux forces instantanées.

172. Supposons qu'à un certain instant un système matériel en mouvement subisse des percussions, Soit θ la durée de l'action de ces percussions. On peut supposer que ce temps très court θ est le même pour toutes ces forces. On pourra faire abstraction pendant ce temps θ des forces motrices qui sollicitent le système : car, elles sont négligeables par rapport aux forces instantanées, et leur effet est inappréciable pendant ce temps θ. Ainsi donc, l'effet des forces instantanées est une variation des vitesses des points matériels, *sans que les points du système aient changé de position pendant ce temps* θ.

Il est facile de s'assurer que les variations δx, δy, δz,... doivent être considérées comme constantes pendant ce temps θ. En effet, ces variations doivent satisfaire aux équations :

$$\frac{\partial L_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_1}{\partial z}\delta z + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_2}{\partial z}\delta z + \ldots = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L_k}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L_k}{\partial z}\delta z + \ldots = 0,$$

dans lesquelles t reste constant. Or, les coordonnées x, y, z,... devant aussi être considérées comme constantes pendant le temps θ, il en résultera que les valeurs de δx, δy, δz,... qui satisfont à ces équations sont constantes.

Nous pouvons donc appliquer à un instant quelconque compris dans la durée θ le théorème de d'Alembert au mouvement du système, *en supprimant tout ce qui se rapporte aux forces finies, et ne conservant que les forces infiniment grandes.* Nous aurons donc l'équation :

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Multipliant les deux membres par dt, et intégrant entre les limites 0 et θ, les variations δx, δy, δz,... étant supposées constantes, nous aurons :

$$\sum\left[\left\{\int_0^\theta X dt - m\frac{dx}{dt} + m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right\}\delta x + \left\{\int_0^\theta Y dt - m\frac{dy}{dt} + m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right\}\delta y + \left\{\int_0^\theta Z dt - m\frac{dz}{dt} + m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right\}\delta z\right] = 0.$$

Or, $\int_0^\theta X dt$, $\int_0^\theta Y dt$, $\int_0^\theta Z dt$ sont les composantes de la percussion donnée, appliquée au point m ; $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ sont les composantes de la quantité de mouvement de ce même point m à la fin de la percussion; $m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$ sont les composantes de la quantité de mouvement du même point m au commencement de la percussion.

On peut donc énoncer l'équation précédente de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Si un système matériel est soumis à des percussions, il y a équilibre, à l'aide des liaisons, entre les percussions appliquées au système, les quantités de mouvement initiales et les quantités de mouvement finales, ces dernières étant prises en sens contraire.*

173. On peut encore énoncer ce théorème d'une autre manière. Observons que la force instantanée P dont les composantes sont X, Y, Z, communiquerait au point m, *s'il était libre*, une quantité de mouvement dont les composantes seraient $\int_0^\theta X dt$, $\int_0^\theta Y dt$, $\int_0^\theta Z dt$ (n° **170**). On en conclut le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il y a équilibre, au moyen des liaisons, entre les quantités de mouvement que les percussions communiqueraient aux différents points du système, s'ils étaient libres, les quantités de mouvement que ces points possèdent au moment où les percussions commencent à agir, et les quantités de mouvement qu'ils possèdent après les percussions, ces dernières étant prises en sens contraire.*

174. REMARQUE I. — Si, au moment où les percussions commencent à agir, le système est au repos, on a :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0,$$

et l'on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il y a équilibre, au moyen des liaisons, entre les percussions appliquées au système et les quantités de mouvement qui ont lieu effectivement à la fin du temps* θ, *prises en sens contraire.*

REMARQUE II. — On peut encore observer que les différences :

$$m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}, \quad m\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dy}{dt}\right)\right\}, \quad m\left\{\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dz}{dt}\right)\right\},$$

sont les composantes de la *quantité de mouvement perdue par le point* m, par suite de la percussion subie par le système. Nous aurons alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il y a équilibre, au moyen de liaisons, entre les percussions et les quantités de mouvement perdues par les différents points.*

CHAPITRE IV.

Théorèmes généraux.

175. Nous allons démontrer que les théorèmes généraux que nous avons obtenus pour le mouvement d'un point unique s'étendent au mouvement d'un système matériel. Ces théorèmes peuvent se déduire comme conséquences du principe de d'Alembert.

Théorème du mouvement du centre de gravité.

176. Considérons un système matériel *libre* dans l'espace, et soient m la masse d'un point quelconque de ce système, x, y, z les coordonnées de ce point, X, Y, Z les composantes suivant les axes de la résultante des forces extérieures pour ce point, Y_1, Y_1, Z_1 les composantes de la résultante des forces intérieures suivant les mêmes axes. Nous aurons pour le point m *rendu libre* les équations du mouvement :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1, \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1.$$

Nous aurons trois équations analogues pour chacun des points du système. En ajoutant membre à membre les équations relatives aux mêmes axes pour tous les points du système, il vient :

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + \Sigma X_1,$$

$$\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + \Sigma Y_1,$$

$$\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + \Sigma Z_1.$$

Or, les forces intérieures étant deux à deux égales et de sens contraires, leurs composantes suivant les axes sont deux à deux égales et de signes contraires. On a donc :

$$\Sigma X_1 = 0, \quad \Sigma Y_1 = 0, \quad \Sigma Z_1 = 0,$$

et, par suite,

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,$$

$$\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad (2)$$

$$\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Dans ces équations X, Y, Z désignent les *composantes de toutes les forces extérieures*, y compris les forces de liaisons quand elles sont extérieures (réactions des appuis, s'il y en a, etc.).

Comme on peut prendre pour axe des x une droite quelconque de l'espace, la première des équations (2) nous donne le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un système matériel en mouvement, à un instant quelconque, la somme algébrique des projections des forces effectives de tous les points du système sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des forces extérieures sur ce même axe.*

177. Remarque I. — Il est bon d'observer que l'on obtiendrait immédiatement les équations (2) par l'application du principe de d'Alembert au système matériel libre : ce sont les trois premières des six équations qui expriment l'équilibre de ce système sous l'action des forces extérieures et des forces d'inertie.

Remarque II. — On peut trouver les équations (2) au moyen des équations de Lagrange, en donnant au système *un mouvement élémentaire de translation.* Cette translation sera compatible avec les liaisons du système, puisque *le système est supposé libre.*

Dans ce cas, tous les δs sont égaux, et, par conséquent, tous les δx sont égaux, ainsi que les δy et les δz, et l'équation de Lagrange nous donne :

$$\delta x \Sigma \left(X - m \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \delta y \Sigma \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \delta z \Sigma \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0.$$

Or, le déplacement de translation δs étant arbitraire, cette équation doit être vérifiée quels que soient δx, δy, δz ; on a donc :

$$\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 0 ;$$

ce sont les équations (2).

Remarque III. — Nous pouvons encore observer que ces équations (2) sont aussi les trois premières des six équations qui expriment l'équilibre des forces perdues.

178. On peut donner aux équations (2) une autre forme. A cet effet, soient M la masse totale du système, x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité à l'époque t, nous aurons (I, n° **323**) :

$$M = \Sigma m, \quad Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz ;$$

d'où :

$$M\frac{dx_1}{dt} = \Sigma m\frac{dx}{dt}, \quad M\frac{dy_1}{dt} = \Sigma m\frac{dy}{dt}, \quad M\frac{dz_1}{dt} = \Sigma m\frac{dz}{dt},$$

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} ;$$

par suite, les équations (2) nous donnent les suivantes :

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X,$$

$$M \frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad (3)$$

$$M \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z.$$

Or, ces équations (3) sont précisément (n° **13**) les équations différentielles que l'on obtiendrait pour le mouvement d'un *point matériel libre*, qui aurait une masse M, dont les coordonnées seraient x_1, y_1, z_1, et qui serait sollicité par une force dont les composantes seraient ΣX, ΣY, ΣZ, c'est-à-dire par une force égale à la résultante des *forces extérieures* transportées en ce point. On a donc le théorème suivant qui est *le théorème du mouvement du centre de gravité :*

Théorème. — *Dans tout système matériel en mouvement, le centre de gravité se meut comme si toute la masse du système était concentrée en ce point, et si toutes les forces extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes.*

Il résulte de là que tout ce que nous avons dit du mouvement d'un point matériel est applicable au mouvement du centre de gravité d'un système matériel.

179. Cas particulier. — Si l'on a :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

il vient :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0.$$

On en tire :

$$\frac{dx_1}{dt} = c, \quad \frac{dy_1}{dt} = c', \quad \frac{dz_1}{dt} = c'',$$

$$x_1 = ct + c_1, \quad y_1 = c't + c'_1, \quad z_1 = c''t + c''_1.$$

On en conclut que, dans ce cas particulier, le mouvement du centre de gravité est *rectiligne et uniforme.* C'est ce qui arrivera *lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ou lorsque ces forces sont telles que, transportées à chaque instant en un point quelconque de l'espace, elles s'y feraient équilibre.* Dans ces deux cas, le centre de gravité du système ne peut avoir qu'*un mouvement rectiligne et uniforme.* Comme cas particulier, ce mouvement peut être nul, et le centre de gravité restera immobile.

180. Application. — Le cas particulier que nous venons d'examiner se présente quand les forces qui sollicitent le système se réduisent à des attractions mutuelles égales et de sens contraires, comme, par exemple, dans le système solaire. Ce système est composé du Soleil, des planètes, des satellites et d'une multitude d'autres corps ; tous ces corps exercent les uns sur les autres des attractions égales et de sens contraires. Les forces extérieures qui agissent sur ce système, libre dans l'espace, sont les actions qui émanent des autres systèmes (étoiles fixes). Or, à cause du grand éloignement des étoiles fixes, on peut considérer ces actions, c'est-à-dire les forces extérieures comme négligeables. Le système solaire est alors un système matériel libre qui n'est soumis qu'à des forces intérieures. Par conséquent, *son centre de gravité est ou immobile, ou animé d'un mouvement rectiligne et*

uniforme. On a constaté que le système possède un mouvement qui l'entraîne dans la direction de la constellation d'Hercule.

Remarque I. — Il résulte des équations (3) que *les forces intérieures* qui existent entre les différents points du système, ou celles qui viendraient à prendre naissance pendant le mouvement, *sont sans effet sur le mouvement du centre de gravité* qui se meut seulement sous l'action des forces extérieures. Ainsi, par exemple, les chocs, les explosions, les réactions moléculaires, les combinaisons chimiques qui peuvent se produire dans le système, ne troublent pas le mouvement du centre de gravité. Si celui-ci est primitivement en repos, et qu'aucune force extérieure n'agisse sur le système, le centre de gravité restera en repos. C'est en cela que consiste le *principe de la conservation du mouvement du centre de gravité*.

Remarque II. — Lorsque le système considéré n'est pas libre, on devra introduire au nombre des forces extérieures les réactions des obstacles, et le théorème du mouvement du centre de gravité sera encore vrai dans ces conditions. Mais, comme les réactions sont des forces inconnues, le théorème ne fournit plus le moyen de déterminer isolément le mouvement du centre de gravité.

Théorème des quantités de mouvement.

181. Si nous reprenons les équations (2), on peut les mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv_x = \Sigma X,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv_y = \Sigma Y, \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv_z = \Sigma Z.$$

Or, mv_x, mv_y, mv_z sont les composantes de la quantité de mouvement du point m. En considérant les quantités de mouvement comme des forces (n° **17**), et les transportant à l'origine O, les expressions Σmv_x, Σmv_y, Σmv_z sont les composantes de la force résultante des quantités de mouvement transportées au point O. Or, si l'on représente cette résultante par une droite OV, et par ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité V de cette droite, ces coordonnées seront respectivement égales aux projections de OV sur les axes, c'est-à-dire aux composantes de la force résultante des quantités de mouvement. On a donc :

$$\xi = \Sigma mv_x, \quad \eta = \Sigma mv_y, \quad \zeta = \Sigma mv_z,$$

et les équations (2) deviennent alors les suivantes :

$$\frac{d\xi}{dt} = \Sigma X,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \Sigma Y, \qquad (5)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \Sigma Z.$$

Mais, si l'on imagine un point mobile, coïncidant avec le point V, les composantes de la vitesse de ce point sont $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$. D'autre part, ΣX, ΣY, ΣZ sont les composantes de la résultante OR des forces extérieures transportées au point O. Les équations (5) nous donnent le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un système matériel en mouvement, si l'on détermine à un instant quelconque la résultante* OV *des quantités de mouvement de tous les points du système, et la résultante* OR *des forces extérieures pour une même origine* O, *cette seconde droite* OR *représentera, en grandeur et en direction, la vitesse du point* V *extrémité de la première.*

182. L'équation :

$$\frac{d}{dt} \Sigma m v_x = \Sigma X,$$

nous donne, en intégrant, et désignant par $(v_x)_0$ la valeur de v_x pour $t = 0$:

$$\Sigma m v_x - \Sigma m (v_x)_0 = \Sigma \int_0^t X dt.$$

Comme on peut prendre pour axe des x une droite quelconque, on aura le théorème suivant :

THÉORÈME. — *L'accroissement total de la somme des quantités de mouvement du système projetées sur un axe fixe quelconque, pendant un temps quelconque, est égal à la somme des impulsions totales des forces extérieures projetées sur cet axe pendant le même temps.*

183. CAS PARTICULIER. — Si l'on a :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

il vient :

$$\Sigma m v_x = c, \quad \Sigma m v_y = c', \quad \Sigma m v_z = c''.$$

Ces équations nous donnent le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque les forces extérieures qui sollicitent un système matériel sont nulles à chaque instant, ou telles qu'étant transportées parallèlement à elles-mêmes en un point* O, *elles s'y feraient équilibre, la somme des projections des quantités de mouvement de tous les points du système sur un axe fixe quelconque est constante pendant toute la durée du mouvement.*

Par conséquent, la résultante des quantités de mouvement de tous les points du système transportées parallèlement à elles-mêmes en un point quelconque reste constante en grandeur et en direction pendant toute la durée du mouvement. C'est le *principe de la conservation de la quantité totale de mouvement.*

Théorème des moments des quantités de mouvement.

184. Reprenons les équations (1), multiplions la troisième par y, la seconde par z, et retranchons. Nous aurons :

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = (Zy - Yz) + (Z_1y - Y_1z);$$

faisant la somme des équations analogues pour tous les points du système, il vient :

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(Zy - Yz) + \Sigma(Z_1y - Y_1z).$$

Or, les forces intérieures étant deux à deux égales et directement opposées, la somme de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle ; par conséquent,

$$\Sigma(Z_1y - Y_1z) = 0,$$

et l'équation précédente nous donne :

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma (Zy - Yz) ;$$

de même,

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \Sigma (Xz - Zx), \qquad (6)$$

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \Sigma (Yx - Xy).$$

Les seconds membres des équations (6) ne renferment que les forces extérieures : ce sont les sommes des moments des forces extérieures par rapport aux trois axes coordonnés. D'autre part, l'expression :

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right),$$

est la somme des moments des forces effectives des différents points du système par rapport à l'axe des x.

D'ailleurs, comme on peut prendre pour axe des x une droite quelconque, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout système matériel en mouvement, la somme des moments des forces effectives de tous les points du système par rapport à un axe quelconque est, à chaque instant, égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport au même axe.*

185. Remarque I. — On pouvait obtenir les équations (6) par l'application du principe de d'Alembert au système matériel libre : ce sont les trois dernières des six équations qui expriment l'équilibre de ce système sous l'action des forces extérieures et des forces d'inertie.

Remarque II. — D'ailleurs, ces équations (6) peuvent aussi se déduire de l'équation de Lagrange, en donnant au système un *mouvement élémentaire de rotation* autour de l'origine O, cette rotation étant compatible avec les liaisons du système, si *celui-ci est libre.* On a alors :

$$\delta x = z\delta q - y\delta r,$$

$$\delta y = x\delta r - z\delta p,$$

$$\delta z = y\delta p - x\delta q\,;$$

en substituant dans l'équation de Lagrange, et égalant à zéro les coefficients des variations δp, δq, δr, lesquelles sont arbitraires, on obtiendra les équations (6).

186. Si nous reprenons maintenant les équations (6), on peut les mettre sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Sigma m\,(yv_z - zv_y) &= \Sigma\,(Zy - Yz), \\ \frac{d}{dt}\Sigma m\,(zv_x - xv_z) &= \Sigma\,(Xz - Zx), \\ \frac{d}{dt}\Sigma m\,(xv_y - yv_x) &= \Sigma\,(Yx - Xy). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Or, en considérant les quantités de mouvement comme des forces, et les transportant à l'origine O, les expressions $\Sigma m\,(yv_z - zv_y)$, $\Sigma m\,(zv_x - xv_z)$, $\Sigma m\,(xv_y - yv_x)$ sont les couples composants du couple des quantités de mouvement.

Si nous désignons par OK l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, et par ξ, η, ζ les coordonnées de l'extrémité K de cet axe, ces coordonnées seront respectivement égales aux projections de OK sur les axes, c'est-à-dire aux couples composants du couple des quantités de mouvement. Nous aurons donc :

$$\xi = \Sigma m(yv_z - zv_y), \quad \eta = \Sigma m(zv_x - xv_z), \quad \zeta = \Sigma m(xv_y - yv_x),$$

et les équations (7) nous donnent les suivantes :

$$\frac{d\xi}{dt} = \Sigma\,(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z),$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \Sigma\,(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x),$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \Sigma\,(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y).$$

On en conclut le théorème suivant :

Théorème de M. Resal. — *Dans tout système matériel en mouvement, si l'on détermine pour un instant quelconque l'axe* OK *du couple résultant des quantités de mouvement de tous les points du système, et l'axe* OG *du couple résultant des forces extérieures, pour une même origine* O, *cette seconde droite* OG *représentera en grandeur et en direction la vitesse du point* K *extrémité de la première* OK.

187. Cas particulier. — Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe des x est nulle pendant toute la durée du mouvement, on aura :

$$\Sigma\,(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z) = 0\,;$$

par suite,

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\,(yv_z - zv_y) = 0,$$

ou bien :

$$\Sigma m\,(yv_z - zv_y) = const.$$

D'ailleurs, comme on peut prendre pour axe des x une droite quelconque, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe fixe est constamment nulle (ou si l'axe du couple résultant des forces extérieures est constamment normal à une droite fixe), la somme des moments des quantités de mouvement de tous les points du système par rapport à cette droite reste constante pendant toute la durée du mouvement.*

188. Supposons maintenant que les forces données se réduisent à des forces intérieures (actions mutuelles), ou à des forces dirigées vers un centre fixe pris pour origine, ou à des forces qui se réduisent à une force unique passant par l'origine ; en général, *que l'axe du couple résultant des forces extérieures soit nul à chaque instant*. Nous aurons :

$$\Sigma\,(Zy - Yz) = 0,\quad \Sigma\,(Xz - Zx) = 0,\quad \Sigma\,(Yx - Xy) = 0.$$

Les équations (7) nous donnent alors :

$$\Sigma m\,(yv_z - zv_y) = c'',$$

$$\Sigma m\,(zv_x - xv_z) = c',$$

$$\Sigma m\,(xv_y - yv_x) = c,$$

c, c', c'' étant des constantes déterminées par les circonstances initiales. Il en résulte que, dans ce cas, les *projections de* OK *sur les axes sont constantes;* donc, OK *est constant en grandeur et en direction*, et l'on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un système matériel quelconque, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ou lorsque l'axe du couple résultant de ces forces pour une origine* O *est constamment nul, l'axe du couple résultant des quantités de mouvement de tous les points du système pour ce même point* O *est constant en grandeur et en direction pendant toute la durée du mouvement.* En d'autres termes, *la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à une droite quelconque passant par ce point* O *reste constante pendant toute la durée du mouvement.*

C'est en cela que consiste le principe de *la conservation des moments des quantités de mouvement.*

189. REMARQUE. — Le théorème des moments des quantités de mouvement subsiste encore lorsque, au lieu de rapporter le mouvement du système à trois axes fixes, on le rapporte à des axes mobiles de direction constante passant par le centre de gravité du système.

En effet, soient Gx', Gy', Gz' trois axes rectangulaires menés par le centre de gravité parallèlement aux axes fixes, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes fixes, x', y', z' les coordonnées d'un point m du corps par rapport aux axes mobiles; nous aurons :

$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 + y', \quad z = z_1 + z'.$$

Par suite,

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\Sigma m\left[(y_1+y')\frac{d^2(z_1+z')}{dt^2}\right.$$

$$\left.-(z_1+z')\frac{d^2(y_1+y')}{dt^2}\right],$$

ou bien :

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\mathrm{M}\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)$$

$$+y_1\Sigma m\frac{d^2z'}{dt^2}-z_1\Sigma m\frac{d^2y'}{dt^2}+\frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma my'-\frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma mz'$$

$$+\Sigma m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right).$$

Mais, l'origine des coordonnées x', y', z' étant au centre de gravité, on a (I, n° **323**) :

$$\Sigma mx'=0,\quad \Sigma my'=0,\quad \Sigma mz'=0,$$

d'où :

$$\Sigma m\frac{d^2x'}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2y'}{dt^2}=0,\quad \Sigma m\frac{d^2z'}{dt^2}=0,$$

et il vient alors :

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\mathrm{M}\left(y_1\frac{d^2z_1}{dt^2}-z_1\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)$$

$$+\Sigma m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right).$$

D'autre part, on a aussi :

$$\Sigma (Zy - Yz) = \Sigma [Z (y_1 + y') - Y (z_1 + z')]$$

$$= y_1 \Sigma Z - z_1 \Sigma Y + \Sigma (Zy' - Yz').$$

Substituant dans la première des équations (6), et ayant égard aux équations (3), il vient :

$$\Sigma m \left(y' \frac{d^2z'}{dt^2} - z' \frac{d^2y'}{dt^2}\right) = \Sigma (Zy' - Yz').$$

Or, cette équation ne diffère de la première des équations (6) que par la substitution de x', y', z' à x, y, z. Il en serait de même des équations que l'on obtiendrait au moyen des deux autres équations (6). On obtient donc par rapport à des axes mobiles du centre de gravité trois équations analogues à celles que l'on obtient par rapport à trois axes fixes de l'espace. Il résulte évidemment de là que toutes les conséquences que nous avons tirées de ces équations (6) se maintiennent quand on rapporte le mouvement à des axes mobiles passant par le centre de gravité. Par conséquent, le *théorème des moments des quantités de mouvement subsiste par rapport au centre de gravité.*

Théorème des aires.

190. Le théorème des moments des quantités de mouvement donne lieu à une interprétation géométrique remarquable.

On sait que l'expression :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt},$$

est égale au double de la dérivée par rapport au temps de l'aire A_z décrite par la projection du rayon vecteur sur le plan des xy, l'aire étant positive quand le rayon vecteur se meut des x vers les y.

Il en résulte que, si l'on a à chaque instant du mouvement :

$$\Sigma (Yx - Xy) = 0,$$

l'équation :

$$\Sigma m (xv_y - yv_x) = c,$$

nous donnera la suivante :

$$\Sigma m \frac{dA_z}{dt} = \frac{c}{2},$$

et, par conséquent,

$$\Sigma m A_z = \frac{c}{2} t,$$

en supposant que les aires A_z soient nulles pour $t = 0$. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si la somme des moments des forces extérieures par rapport à un axe fixe passant par l'origine des rayons vecteurs est constamment nulle, la somme des produits que l'on obtient en multipliant la masse de chaque point matériel par l'aire que décrit la projection de son rayon vecteur sur un plan perpendiculaire à cet axe varie proportionnellement au temps.*

191. Si l'on a en même temps les trois équations :

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma (Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma (Yx - Xy) = 0,$$

ce qui arrivera lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ou, en général, lorsque le couple résultant de la translation de ces forces à l'origine O est nul à chaque instant, nous aurons la même propriété pour chacun des trois plans coordonnés. Elle aura donc lieu pour un plan fixe quelconque, et nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsque dans un système matériel en mouvement, il n'y a pas de forces extérieures, ou lorsque l'axe du couple résultant de ces forces relatif à une origine quelconque est nul, la somme des produits que l'on obtient en multipliant la masse de chaque point matériel par l'aire décrite par la projection de son rayon vecteur sur un plan fixe quelconque variera proportionnellement au temps.*

C'est en cela que consiste le *théorème des aires*, ou le *principe de la conservation des aires*.

On a alors les équations (n° **188**) :

$$\Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c'',$$

$$\Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c',$$

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c.$$

On les appelle les *intégrales des aires*.

Il est bon de remarquer ici que, s'il arrive des chocs entre les différents corps du système, ou des explosions, ces trois dernières équations ne seront pas modifiées, puisque ces phénomènes introduisent des forces égales et de sens contraires qui disparaissent dans les équations (6) (n° **184**).

Plan du maximum des aires.

192. Supposons un système satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus (n° **191**), c'est-à-dire tel que l'axe du couple résultant des forces extérieures soit nul, et considérons les aires élémentaires décrites dans l'espace pendant un élément de temps par les rayons vecteurs qui joignent le point O aux divers points du système ; les projections de ces aires sur un plan sont les aires décrites dans ce même temps par les rayons vecteurs des projections des points sur ce plan.

Soient dA_x, dA_y, dA_z les projections d'une de ces aires élémentaires sur les plans coordonnés, menés par le point O ; la projection de cette aire sur un plan P faisant des angles α, β, γ avec les plans coordonnés sera donnée par la formule :

$$dA_p = dA_x \,.\, \cos\alpha + dA_y \,.\, \cos\beta + dA_z \,.\, \cos\gamma,$$

de laquelle on tire, en intégrant :

$$A_p = A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma\,;$$

par conséquent,

$$\Sigma m A_p = \cos\alpha\, \Sigma m A_x + \cos\beta\, \Sigma m A_y + \cos\gamma\, \Sigma m A_z.$$

Or, dans le cas particulier que nous avons examiné (nº **191**), on a (nº **188**) :

$$\Sigma m A_x = \frac{c''}{2}\, t, \quad \Sigma m A_y = \frac{c'}{2}\, t, \quad \Sigma m A_z = \frac{c}{2}\, t\,;$$

par suite,

$$\Sigma m A_p = \frac{1}{2}\, t\, (c'' \cos\alpha + c' \cos\beta + c \cos\gamma).$$

Dans cette équation le coefficient de t est constant, lorsque le plan P est donné : cette formule est conforme au théorème énoncé plus haut (nº **191**).

193. On peut d'ailleurs mettre cette équation sous la forme suivante :

$$\Sigma m A_p = \frac{1}{2}\, kt \left(\frac{c''}{k} \cos\alpha + \frac{c'}{k} \cos\beta + \frac{c}{k} \cos\gamma\right),$$

en posant :

$$k = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}.$$

Or, on peut considérer $\frac{c''}{k}$, $\frac{c'}{k}$, $\frac{c}{k}$ comme les cosinus des angles que fait avec les axes coordonnés une certaine droite OI, dont *la direction est,* par conséquent, *indépendante de la position du plan* P. Si donc nous imaginons un plan Ω perpendiculaire à cette droite OI, la position de ce plan est indépendante de la position du plan P, et en désignant par θ l'angle qu'il fait avec le plan P, on a :

$$\cos\theta = \frac{c''}{k}\cos\alpha + \frac{c'}{k}\cos\beta + \frac{c}{k}\cos\gamma\,;$$

par suite,

$$\Sigma m A_p = \frac{1}{2}\,kt\cos\theta.$$

Donc, *la somme des produits que l'on obtient en multipliant les masses des différents points matériels par les aires correspondantes décrites sur le plan* P, *est égale au produit de* $\frac{1}{2}kt$ *par le cosinus de l'angle que fait le plan* P *avec le plan fixe* Ω.

194. La quantité k étant *indépendante de la position du plan* P, on voit que $\Sigma m A_p$ sera *maximum* lorsque l'on aura $\theta = 0$, c'est-à-dire quand le plan P coïncidera avec le plan Ω ; on aura alors :

$$\Sigma m A_p = \frac{1}{2}\,kt.$$

Donc, *il existe un plan fixe tel que la somme des aires décrites pendant un temps quelconque par les projections des rayons vecteurs des différents points sur ce plan, multipliées par les masses de ces points, est plus grande que pour tout autre plan de projection.*

Ce plan est toujours le même, quel que soit le temps écoulé. On l'appelle le *plan du maximum des aires:* c'est le *plan invariable de Laplace.* Sa position est déterminée par les formules :

$$\cos\lambda = \frac{c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}, \quad \cos\mu = \frac{c'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}};$$

il coïncide donc avec le plan du couple résultant des quantités de mouvement, et il a pour équation :

$$c''x + c'y + cz = 0.$$

Remarque. — Il est évident que le *théorème des aires subsiste*, comme celui des moments des quantités de mouvement, dans *le mouvement relatif* du système autour du centre de gravité.

Théorème des forces vives.

195. Nous avons vu, dans le mouvement d'un point matériel libre (nº **38**), que l'accroissement de force vive d'un point matériel pendant un certain temps est égal au double du travail de la force motrice (ou de la résultante des forces appliquées) pendant ce temps. D'après cela, l'équation différentielle des forces vives pour un point matériel libre est :

$$\frac{1}{2}\, dmv^2 = \mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz.$$

Or, dans un système matériel, nous pouvons considérer chacun des points comme libre, et sollicité par toutes les forces extérieures et intérieures. Nous pouvons alors appliquer à chacun de ces points rendu libre le théorème que nous venons de rappeler, et nous aurons, pour le système, l'équation :

$$\frac{1}{2}\, d\Sigma mv^2 = \Sigma\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

dans laquelle X, Y, Z sont les composantes de l'une quelconque des forces extérieures ou intérieures. Le signe Σ du premier membre se rapporte à tous les points du système, celui du second membre à toutes les forces.

En intégrant, on a :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0{}^2 = \sum \int_0^t (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Observons que le second membre renferme toutes les forces extérieures et intérieures, y compris les forces qui tiennent lieu des liaisons.

Nous appellerons *force vive totale* du système, la somme des forces vives des différents points de ce système, et nous aurons le théorème suivant, qui est le *théorème des forces vives :*

THÉORÈME. — *L'accroissement de la force vive totale d'un système matériel en mouvement pendant un temps donné est égal au double de la somme des travaux de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures qui agissent sur les différents points du système pendant ce temps.*

196. REMARQUE. — Observons ici que, si certains points sont assujettis à se mouvoir sur des surfaces ou sur des courbes fixes sans frottement, le travail des réactions normales est nul.

Nous devons encore remarquer que *les forces intérieures ne disparaissent pas d'elles-mêmes* dans le théorème des forces vives comme dans les autres théorèmes généraux. Nous savons en effet (I, n° **379**), que la somme des travaux élémentaires des deux forces égales et de sens contraires qui se développent entre deux points matériels, n'est égale à zéro que si la distance de ces deux points ne varie pas. Par conséquent, la somme des travaux des forces intérieures d'un système est, en général, différente de zéro, et cette somme entrera dans l'équation des forces vives.

197. On peut encore obtenir le théorème des forces vives en s'appuyant sur le théorème de d'Alembert. Nous avons vu que ce théorème nous donne l'équation suivante :

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0,$$

dans laquelle X, Y, Z désignent les composantes de toutes les forces qui agissent sur le système, à l'exception des forces qui tiennent lieu des liaisons, δx, δy, δz,... devant être compatibles avec ces liaisons.

Nous avons vu (n° **165**) que, si les équations de liaisons ne renferment pas explicitement le temps, le déplacement effectif sera un déplacement compatible avec les liaisons du système, et l'on pourra poser :

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz, \ldots$$

L'équation de Lagrange nous donne alors :

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right] = 0,$$

ou bien :

$$\Sigma m\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = \Sigma\,(Xdx + Ydy + Zdz),$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma\int_0^t (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

C'est l'*équation des forces vives dans le cas où les liaisons ne renferment pas explicitement le temps.* Le second membre de cette équation ne renferme que les forces qui agissent sur le système (y compris les forces intérieures), à l'exclusion des forces de liaisons.

Ainsi donc, dans le cas où *les liaisons ne renferment pas explicitement le temps*, l'équation des forces vives ne renferme pas les forces de liaisons.

198. Si, au contraire, une ou plusieurs des équations de liaisons renfermaient explicitement le temps, le déplacement réel ne serait pas compatible avec les liaisons : le calcul que nous venons de faire n'est plus applicable. Pour que l'on puisse identifier le déplacement réel à un déplacement virtuel, il faudrait que les δx, δy, δz,... fussent complètement arbitraires.

Or, il est possible de donner à l'équation de Lagrange une forme telle que les δx, δy, δz,... y soient tout à fait arbitraires.

En effet, si nous désignons par X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la *force totale*, résultante des forces extérieures, des actions mutuelles et des forces tenant lieu des liaisons, pour le point m, nous aurons l'équation :

$$\sum\left[\left(\mathrm{X}_1 - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(\mathrm{Y}_1 - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\mathrm{Z}_1 - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

On obtient cette équation de la manière suivante : le point m pouvant être considéré comme libre sous l'action de la force X_1, Y_1, Z_1, on a pour ce point :

$$X_1 = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y_1 = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z_1 = m \frac{d^2z}{dt^2};$$

on obtient des équations analogues pour chacun des points du système rendu libre. Or, en multipliant chacun des groupes par δx, δy, δz et ajoutant, on trouve l'équation précédente.

Cela posé, si, dans cette équation où les δx, δy, δz,... sont arbitraires, on remplace δx, δy, δz,... par dx, dy, dz,..., on aura l'équation :

$$\Sigma m \frac{dx\, d^2x + dy\, d^2y + dz\, d^2z}{dt^2} = \Sigma (X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz).$$

Ce sera l'*équation différentielle des forces vives*.

199. On pourra séparer dans le second membre les termes qui se rapportent aux trois espèces de forces. En désignant par X, Y, Z les composantes de la force extérieure au point m, par X′, Y′, Z′ les composantes de la force qui tient lieu des liaisons, les termes du second membre qui se rapportent à ces deux espèces de forces seront :

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz), \quad \text{et} \quad \Sigma (X' dx + Y' dy + Z' dz).$$

D'autre part, si l'on désigne par $mm'f(r)$ les actions mutuelles exercées entre les deux points m et m', ces forces étant appliquées l'une en m, l'autre en m',

le travail élémentaire de l'action mutuelle de ces deux molécules sera — $mm'f(r)\,dr$; donc, la somme des travaux des actions mutuelles sera :

$$-\Sigma mm'\int_0^t f(r)\,dr,$$

et nous aurons pour l'intégrale des forces vives :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \sum\int_0^t (Xdx + Ydy + Zdz$$

$$+\sum\int_0^t (X'dx + Y'dy + Z'dz$$

$$-\Sigma mm'\int_0^t f(r)\,dr.$$

200. Lorsque les liaisons sont indépendantes du temps, le second terme du second membre est nul, parce qu'il correspond à des forces qui sont normales aux chemins réellement parcourus (n^{os} **164** et **165**), et l'on a alors l'équation :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \sum\int_0^t (Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$-\Sigma mm'\int_0^t f(r)\,dr.$$

C'est l'équation que nous aurions trouvée par le premier procédé (n° **197**), si nous avions séparé dans l'équation les termes correspondant aux forces extérieures et ceux qui correspondent aux forces intérieures.

201. Reprenons l'équation des forces vives sous la forme (n° **197**) :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \sum\int_0^t (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

en supposant que *les liaisons ne renferment pas explicitement le temps*. Nous savons que, dans ce cas, X, Y, Z sont les composantes de l'une quelconque des forces intérieures ou extérieures du système ; d'ailleurs, le signe Σ du premier membre se rapporte à tous les points du système, et celui du second membre à toutes les forces extérieures et intérieures.

Supposons qu'il existe une *fonction de force* U, ne renfermant pas explicitement le temps, c'est-à-dire une fonction dont les dérivées partielles prises par rapport aux coordonnées x, y, z d'un point soient égales aux composantes X, Y, Z de la force appliquée en ce point; en d'autres termes, supposons que la quantité $\Sigma\,(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$ soit la différentielle exacte d'une fonction U. Nous aurons alors :

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\mathrm{U} - 2\mathrm{U}_0,$$

ou bien :

$$\Sigma mv^2 = 2\mathrm{U} + h,$$

h étant une constante. Cette équation s'appelle l'*intégrale des forces vives :* on dit alors que l'*intégrale des forces vives existe*. On peut la mettre sous la forme :

$$\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = 2\mathrm{U} + h\,;$$

c'est une *intégrale première* des équations du mouvement. Nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans un système soumis à des liaisons indépendantes du temps, et pour lequel il existe une fonction de force également indépendante du temps, la force vive du système est égale au double de la fonction de force augmentée d'une constante.*

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par Daniel Bernoulli.

202. On voit que, dans ce cas, la force vive du système ne dépend que des coordonnées des différents points. Si, *à deux époques différentes, les points du système repassent par les mêmes positions, la force vive à ces deux époques reprend la même valeur :* elle est indépendante des trajectoires des différents points entre ces deux époques.

C'est en cela que consiste le principe de la *conservation des forces vives*. Il a lieu lorsqu'il existe une fonction de force. Le mot *conservation* se rapporte à cette indépendance de la forme du chemin parcouru, ou, ce qui est la même chose, des équations de condition, puisque la forme du chemin parcouru dépend des équations de condition.

C'est ce qui arrivera lorsque le système n'est sollicité que par des actions mutuelles (forces attractives ou répulsives) égales et de sens contraires, et fonctions des distances mutuelles. En effet, on a alors pour deux points :

$$Xdx + Ydy + Zdz + X'dx' + Y'dy' + Z'dz' = -mm'f(r)\,dr,$$

et l'équation des forces vives nous donne :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = -\sum\int_0^t mm'f(r)\,dr.$$

C'est ce qui arrivera encore lorsque les forces extérieures sont des forces attractives ou répulsives dirigées vers des centres fixes, ces forces étant des fonctions des distances aux centres fixes. Car, on a alors, comme nous l'avons vu (n° **50**) pour chacune de ces forces :

$$Xdx + Ydy + Zdz = - F(r)\,dr,$$

expression qui est une différentielle exacte.

203. Reprenons encore l'équation des forces vives (n° **195**), et distinguons dans le second membre les termes relatifs aux *forces extérieures* et ceux qui se rapportent aux *forces intérieures ;* nous aurons :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F_e + \Sigma\mathfrak{T}F_i.$$

Or, on a :

$$\Sigma\mathfrak{T}F_i = -\sum\int_0^t mm' f(r)\,dr,$$

ou bien, en posant :

$$f(r)\,dr = d\varphi(r),$$

il vient :

$$\Sigma\mathfrak{T}F_i = -\sum\int_0^t mm' d\varphi(r) = -\Big\{\Sigma mm'\varphi(r)\Big\}_0^t.$$

Mais, la fonction $\varphi(r)$ étant évidemment une fonction des coordonnées x, y, z, x', y', z' des deux points m et m', nous pourrons poser :

$$\Sigma mm'\varphi(r) = \Pi(x, y, z, x', y', z', \ldots),$$

et nous aurons :

$$\Sigma \mathfrak{T} F_i = -\Pi(x, y, z, x', y', z', \ldots) + \Pi(x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, \ldots)$$

$$= \Pi_0 - \Pi,$$

en désignant par Π_0 et Π les valeurs de la fonction Π aux deux époques 0 et t.

L'équation des forces vives est alors :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{T} F_e + \Pi_0 - \Pi.$$

204. Remarque I. — La fonction Π ne varie pas lorsque les distances r restent constantes : c'est ce qui arrivera pour un corps solide en mouvement ; par conséquent, pour un corps solide en mouvement et soumis à l'action de forces extérieures, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma \mathfrak{T} F_e.$$

Donc, *l'accroissement de la force vive totale d'un solide pendant un certain temps est égal au double de la somme des travaux des forces extérieures pendant ce temps.*

En particulier, *si aucune force extérieure n'agit sur le corps solide en mouvement, sa force vive totale reste constante.*

205. Remarque II. — Si un système matériel se déforme pendant le mouvement, mais en repassant périodiquement par la même figure après des intervalles

de temps déterminés, la fonction $\Pi - \Pi_0$ sera nulle, si les temps 0 et t correspondent au commencement et à la fin de ces intervalles, et nous aurons encore l'équation :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F_e.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Quand un système matériel quelconque en mouvement reprend la même figure après des intervalles de temps déterminés, la variation de la force vive totale pendant un de ces intervalles est égale au double de la somme des travaux des forces extérieures pendant ce temps.*

En particulier, *s'il n'y a pas de force extérieure, la force vive totale reprend la même valeur chaque fois que le système reprend la même figure.*

206. REMARQUE III. — Le théorème exprimé par l'équation :

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F_e + \Pi_0 - \Pi,$$

peut être énoncé sous une forme qu'il est utile de connaître.

Nous appellerons *énergie actuelle* d'un système la demi somme des forces vives de tous ses points à un instant donné : nous la désignerons par T ; *énergie potentielle* la quantité Π dont la différentielle prise en signe contraire mesure la somme des travaux élémentaires des forces intérieures (nº **203**). Nous appellerons *énergie totale* d'un système la somme de son énergie actuelle et de son énergie potentielle. Ces dénominations sont dues à M. Rankine.

L'équation ci-dessus nous donne :

$$\left(\frac{1}{2}\Sigma mv^2 + \Pi\right) - \left(\frac{1}{2}\Sigma mv_0{}^2 + \Pi_0\right) = \Sigma\mathfrak{T}F_e,$$

ou bien, en posant $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 = T$,

$$(T + \Pi) - (T_0 + \Pi_0) = \Sigma\mathfrak{T}F_e.$$

On en conclut que, *dans tout système matériel en mouvement, la variation de l'énergie totale pendant un certain temps est égale à la somme des travaux des forces extérieures pendant ce temps.*

En particulier, si aucune force extérieure n'agit sur le système, on a :

$$(T + \Pi) = (T_0 + \Pi_0).$$

Or, le second membre de cette équation étant indépendant de t, il en résulte que le premier membre est constant. Donc, *l'énergie totale d'un système matériel soustrait à l'action de toute force extérieure est invariable.*

Si l'on considère l'univers comme un système de points matériels soumis exclusivement à leurs actions mutuelles, on conclut du théorème précédent que *l'énergie totale de l'univers est une quantité constante.*

207. Il est facile de s'assurer que le *théorème des forces vives a lieu par rapport au centre de gravité, comme s'il était fixe.*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité, x', y', z' les coordonnées d'un point m du corps par

rapport à trois axes menés par le centre de gravité parallèlement aux axes fixes. Nous aurons :

$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 + y', \quad z = z_1 + z'\,;$$

d'où :

$$\Sigma m v^2 = \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \Sigma m \left[\left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \mathrm{M}\left[\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]$$

$$+ \Sigma m \left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

$$+ 2\frac{dx_1}{dt}\Sigma m \frac{dx'}{dt} + 2\frac{dy_1}{dt}\Sigma m \frac{dy'}{dt} + 2\frac{dz_1}{dt}\Sigma m \frac{dz'}{dt}.$$

Mais, l'origine des coordonnées x', y', z' étant au centre de gravité, on a (I, n° **323**) :

$$\Sigma m x' = 0, \quad \Sigma m y' = 0, \quad \Sigma m z' = 0\,;$$

par suite,

$$\Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dy'}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dz'}{dt} = 0.$$

Par conséquent, en désignant par V la vitesse du centre de gravité, par u la vitesse relative du point m par rapport au centre de gravité, on a :

$$\Sigma mv^2 = MV^2 + \Sigma mu^2.$$

Cette formule nous donne le théorème suivant :

THÉORÈME DE KOENIG. — *La force vive totale d'un système matériel est égale à la force vive du système par rapport à son centre de gravité, augmentée de la force vive du centre de gravité où l'on supposerait toute la masse concentrée.*

D'autre part, nous avons aussi :

$$\Sigma\,(Xdx + Ydy + Zdz)$$

$$= \Sigma\,[Xd\,(x_1 + x') + Yd\,(y_1 + y') + Zd\,(z_1 + z')]$$

$$= \Sigma\,(Xdx' + Ydy' + Zdz') + dx_1\Sigma X + dy_1\Sigma Y + dz_1\Sigma Z.$$

Mais, si l'on applique le théorème des forces vives au mouvement du centre de gravité (x_1, y_1, z_1) sous l'action de la force ΣX, ΣY, ΣZ, on a (n° **39**) :

$$\frac{1}{2}\,dMV^2 = dx_1\Sigma X + dy_1\Sigma Y + dz_1\Sigma Z,$$

et, par conséquent, il vient :

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = \frac{1}{2}\,dMV^2 + \Sigma\,(Xdx' + Ydy' + Zdz').$$

L'équation différentielle des forces vives (n° **195**) :

$$\frac{1}{2}\,d\Sigma mv^2 = \Sigma\,(Xdx + Ydy + Zdz),$$

nous donne alors :

$$\frac{1}{2}d\mathrm{MV}^2 + \frac{1}{2}d\Sigma mu^2 = \frac{1}{2}d\mathrm{MV}^2 + \Sigma(\mathrm{X}dx' + \mathrm{Y}dy' + \mathrm{Z}dz);$$

par suite, on a :

$$\frac{1}{2}d\Sigma mu^2 = \Sigma(\mathrm{X}dx' + \mathrm{Y}dy' + \mathrm{Z}dz'),$$

ou bien, en intégrant,

$$\frac{1}{2}\Sigma mu^2 - \frac{1}{2}\Sigma mu_0{}^2 = \sum\int_0^t(\mathrm{X}dx' + \mathrm{Y}dy' + \mathrm{Z}dz'),$$

et la propriété est démontrée.

Remarque. — La fonction Π ne dépendant que des distances des différents points du système, ne change pas de valeur quand on rapporte le système aux axes parallèles du centre de gravité. Il en sera donc de même de l'expression $\Pi_0 - \Pi$ du travail des forces intérieures. Donc, *le travail des forces intérieures est le même dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif au centre de gravité.*

Théorème de la moindre action.

208. Supposons un système matériel pour lequel l'intégrale des forces vives existe, c'est-à-dire tel que les équations de liaisons ne renferment pas explicitement le temps, et qu'il existe une fonction de force ne renfermant pas explicitement le temps. Nous aurons :

$$\Sigma mv^2 = 2U + h.$$

Considérons les différents mouvements par lesquels le système peut passer d'une de ses positions à une autre, en satisfaisant aux équations de liaisons, et formons pour chacun de ces mouvements la somme

$$\sum \int mvds$$

des produits des quantités de mouvement de chaque point du système par les arcs élémentaires qu'il décrit successivement sur sa trajectoire réelle ou sur sa trajectoire fictive. Le *théorème de la moindre action* consiste en ce que *cette somme sera un minimum pour le mouvement effectif.*

Nous avons donc à démontrer que l'on a, *pour le mouvement effectif :*

$$\delta V = \delta \sum \int mvds = 0.$$

Or, on a :

$$\delta V = \delta \sum \int mv\,ds = \sum \int m\,\delta v\,ds + \sum \int m\,v\,\delta\,ds\,;$$

mais,

$$\sum \int m\,\delta v\,ds = \sum \int mv\,\delta v\,dt = \int dt\,\Sigma mv\,\delta v.$$

D'ailleurs, l'équation des forces vives :

$$\Sigma mv^2 = 2U + h,$$

nous donne :

$$\Sigma mv\,\delta v = \delta U = \Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,;$$

donc,

$$\sum \int m\,\delta v\,ds = \int \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,dt.$$

Pour transformer la seconde intégrale de δV, observons que l'équation :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

nous donne :

$$ds\,\delta ds = dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz,$$

d'où :

$$mv\delta ds = m\frac{dx}{dt}\delta dx + m\frac{dy}{dt}\delta dy + m\frac{dz}{dt}\delta dz.$$

Par conséquent,

$$\sum\int mv\delta ds = \sum\int m\frac{dx}{dt}\delta dx + \sum\int m\frac{dy}{dt}\delta dy + \sum\int m\frac{dz}{dt}\delta dz.$$

Or, on a, en intégrant par parties :

$$\sum\int m\frac{dx}{dt}\delta dx = \Sigma m\frac{dx}{dt}\delta x - \sum\int \delta x \,.\, m\frac{d^2x}{dt^2}\,dt.$$

Par suite,

$$\delta V = \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) + \int\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]dt.$$

Mais, le premier terme du second membre est nul aux limites, puisque les positions extrêmes de chacun des points du système sont supposées fixes. D'autre part, pour le mouvement effectif, on a, en vertu de l'équation de Lagrange :

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Par conséquent, pour le mouvement effectif, on a $\delta V = 0$; or, cette condition exprime que la fonction V est un minimum, puisque cette fonction n'a évidemment pas de maximum.

CHAPITRE V.

Du mouvement relatif.

209. Les propriétés du mouvement que nous avons établies jusqu'ici se rapportent au *mouvement absolu*, c'est-à-dire qu'elles supposent que le mouvement soit rapporté à un système de trois axes fixes dans l'espace.

Nous nous proposons maintenant d'étudier le *mouvement apparent ou relatif*, c'est-à-dire le mouvement rapporté à un système de comparaison qui se déplace constamment par rapport au système fixe.

On pourrait, pour étudier le mouvement relatif, commencer par déterminer le mouvement absolu du corps, comme nous l'avons fait précédemment, puis passer du mouvement absolu au mouvement relatif par un changement de coordonnées. Mais, il faut observer que cette méthode serait très laborieuse, et même, elle serait impossible si les forces motrices dépendaient du mouvement relatif du corps. Il est donc préférable de former directement les équations différentielles du mouvement d'un point ou d'un système en rapportant ce mouvement à un système de comparaison animé d'un mouvement connu.

210. Nous commencerons par l'étude du *mouvement relatif d'un point libre.*

Soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires mobiles auxquels se réduit le système de comparaison, p, q, r les composantes de la rotation suivant ces axes à la fin du temps t ; x, y, z les coordonnées relatives du point mobile à cet instant, X, Y, Z les composantes suivant ces mêmes axes de la force motrice P qui détermine le mouvement absolu.

On sait (I, n° **165**) que l'accélération φ_r du mouvement relatif est la résultante de l'accélération φ_a du mouvement absolu, de l'accélération du mouvement d'entraînement prise en sens contraire $-\varphi_e$, et de l'accélération complémentaire prise en sens contraire $-\varphi_c = -2\omega v_r \sin\alpha$. Nous aurons donc, d'après cela, suivant l'axe des x :

$$\varphi_{r,x} = \varphi_{a,x} - \varphi_{e,x} - \varphi_{c,x},$$

ou bien :

$$\varphi_{r,x} = \varphi_{a,x} - \varphi_{e,x} - 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right).$$

Or, la force P est représentée en grandeur et en direction par l'accélération absolue φ_a du point m, multipliée par la masse de ce point ; par conséquent, $X = m\varphi_{a,x}$. D'autre part, les composantes de l'accélération relative φ_r sont $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Nous aurons, en multipliant par m les deux membres de l'équation précédente et des deux équations analogues relatives aux axes des y et des z :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X - m\varphi_{e,x} - 2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y - m\varphi_{e,y} - 2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \quad (1)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z - m\varphi_{e,z} - 2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Ce sont *les équations différentielles du mouvement relatif d'un point libre.*

211. Il est facile d'interpréter ces équations qui nous apprennent que la force $m\varphi_r$ est la résultante de la force P et des deux forces — $m\varphi_e$ et — $m\varphi_c$: ces deux dernières portent le nom de *forces apparentes* ou *forces fictives.* La force $m\varphi_r$ est évidemment la force qui, appliquée au point m supposé libre, lui communiquerait une accélération absolue égale à son accélération relative. La force — $m\varphi_e$ est la force d'inertie du point m, supposé entraîné par le mouvement des axes mobiles : on l'appelle *force d'inertie d'entraînement*, ou *réaction d'entraînement.* La force — $m\varphi_c$, qui agit en sens contraire de l'accélération complémentaire, est la *force centrifuge composée.* On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le mouvement relatif d'un point matériel libre, rapporté à un système de comparaison mobile, peut être traité comme un mouvement absolu, pourvu que l'on joigne à la force motrice* P *(ou à la résultante de toutes les forces qui agissent réellement sur ce point) deux forces fictives ou apparentes, savoir : la force d'inertie d'entraînement, et la force centrifuge composée.*

212. Il résulte de là que les théorèmes généraux de la Dynamique du point matériel sont applicables au mouvement relatif de ce point par rapport à des

axes mobiles, comme à son mouvement absolu, pourvu que l'on introduise dans les formules et les énoncés les deux forces fictives dont nous venons de parler.

213. Remarque I. — Si le point matériel n'est pas libre, mais assujetti à certaines conditions, par exemple à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe, on ramène le problème au cas du point libre, en ajoutant aux composantes X, Y, Z de la force motrice suivant les axes mobiles, les composantes suivant ces mêmes axes de la réaction normale de la surface ou de la courbe, ce qui introduit de nouvelles inconnues. Mais alors les équations de la surface ou de la courbe, que nous supposerons rapportées aux axes mobiles Ox, Oy, Oz, nous fourniront de nouvelles équations en nombre suffisant pour déterminer les fonctions inconnues.

214. Remarque II. — Les forces fictives peuvent dans certains cas se réduire à une seule, ou disparaître complétement.

En effet, il résulte de ce que nous avons vu (I, n° **164**) que la force centrifuge composée est nulle :

1° pour $\omega = 0$, c'est-à-dire lorsque le mouvement d'entraînement se réduit à une simple translation ;

2° pour $v_r = 0$, c'est-à-dire lorsque la vitesse relative est nulle ; alors le point est en *repos relatif ;*

3° pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire lorsque la vitesse relative est parallèle à l'axe instantané de rotation.

Dans ces trois cas, les forces apparentes se réduisent à la force d'inertie d'entraînement.

La force d'inertie d'entraînement est nulle, lorsque le mouvement d'entraînement est une translation rectiligne et uniforme (I, n° **164**) ; car, alors $\varphi_e = 0$. Dans ce dernier cas, les deux forces fictives sont nulles : il n'y a donc aucune force apparente à joindre aux forces motrices.

215. Remarquons encore que l'accélération complémentaire φ_c étant perpendiculaire à la vitesse relative, il en résulte que le travail relatif de la force centrifuge composée est toujours nul, et, par conséquent, cette force n'entrera pas dans le théorème de forces vives appliqué au mouvement relatif.

Mouvement apparent d'un point matériel à la surface de la Terre.

216. La terre est animée d'un mouvement de translation dans l'espace, et d'un mouvement de rotation uniforme autour de la ligne des pôles. Ce dernier mouvement s'effectue de l'Ouest à l'Est. Il est facile de s'assurer que l'on peut faire abstraction du mouvement de translation et ne considérer que celui de rotation. En effet, si le mouvement de translation était rectiligne et uniforme, il serait rigoureusement sans influence, puisque la force d'inertie d'entraînement et la force centrifuge composée seraient nulles (n° **214**) ; d'autre part, quel que soit le mouvement de translation, son influence est à peu près nulle pour chaque point de la terre : en effet, ce mouvement est dû à l'action du Soleil et des planètes, et cette action est sensiblement la même en grandeur et en direction pour tous les points du globe. Or, si l'on tient compte des forces apparentes qui correspondent à ce mouvement, on devra aussi tenir compte des forces réelles qui le produisent, et ces deux systèmes de forces se font sensiblement équilibre.

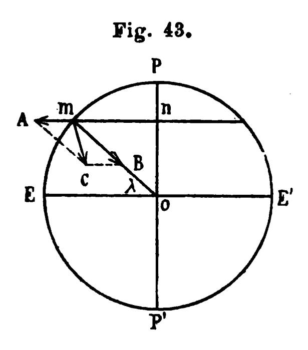
Nous ferons donc abstraction du mouvement de translation, et nous ne tiendrons compte que du mouvement de rotation.

217. Cela posé, considérons la Terre comme tournant d'un *mouvement uniforme autour de son axe,* que nous supposerons *fixe*, de l'Ouest à l'Est, avec une vitesse angulaire constante ω. Comme la terre effectue un tour entier en 86164 secondes (jour sidéral), nous aurons :

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}000073.$$

Il résulte de là que ω est très petit, ainsi que ses composantes p, q, r suivant les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Il s'ensuit que, si la vitesse relative v_r n'est pas très grande, ou si elle est nulle (ce qui arrive dans le cas du repos apparent), ou si elle est parallèle à l'axe du globe ($x = 0$), les forces centrifuges composées pourront être négligées dans les équations du mouvement relatif, et nous ne devrons joindre à la force motrice P que la force d'inertie d'entraînement.

Fig. 43.



Cherchons donc à déterminer cette force d'inertie d'entraînement. A cet effet, observons que le point m dans la rotation autour de l'axe PP' (fig. 43) décrit un cercle d'un mouvement uniforme.

Or, dans ce cas (I, n° **164**), l'accélération du point se réduit à sa composante centripète $\omega^2 r$ (r étant la distance mn du point m à l'axe PP').

La force d'inertie d'entraînement se réduit donc à la force centrifuge $m\omega^2 r$, due au mouvement de rotation

autour de PP' : elle est dirigée suivant le prolongement mA du rayon r du parallèle passant par le point m, et elle a pour expression $m\omega^2 . mn = m\omega^2 R \cos \lambda$, en désignant par R le rayon de la terre, et par λ la latitude du point m.

L'accélération centrifuge est toujours très faible; car, à l'équateur où l'on a :

$$r = R = 6376821^m,$$

elle est maximum et a pour expression :

$$\omega^2 r = 0,03398.$$

218. Si donc on veut étudier le *mouvement apparent* d'un point libre soumis uniquement à l'attraction terrestre, on devra joindre à la force motrice mB qui est l'attraction terrestre, la force centrifuge mA correspondante à la position du mobile dans sa rotation autour de PP'. Or, la résultante mC de ces deux forces est ce que l'on appelle le *poids du corps* : c'est la force égale et opposée à celle qu'il faudrait appliquer au point m supposé en repos apparent pour qu'il reste en équilibre. C'est le produit de la masse du point matériel par l'accélération g correspondante au point m, et la direction de cette résultante est la *verticale*.[1]

---

1. On ne doit donc pas confondre le poids d'un corps avec l'attraction que ce corps éprouve de la part de la terre. Le poids est la résultante de cette attraction et de la force centrifuge due à la rotation de la terre.

Ainsi donc, quand même la terre serait rigoureusement sphérique, la direction de la verticale (fil à plomb) ne serait pas celle de l'attraction terrestre sur le point m, mais celle de la résultante mC de cette attraction mB et de la force centrifuge mA. Il s'ensuit que, même dans le cas de la sphéricité, les verticales ne passeraient pas toutes par le centre de la terre. Cela n'arriverait qu'à l'équateur et aux deux pôles ; partout ailleurs, la force centrifuge produit une déviation de la verticale par rapport au rayon terrestre. C'est la vraie cause de l'aplatissement du globe aux pôles. En effet, dans le cas où le point serait en repos apparent, il serait en équilibre sous l'action de cette résultante et de la réaction de la surface terrestre, normale à cette surface. Il s'ensuit que le globe terrestre a une forme ellipsoïdale telle que sa surface moyenne soit normale à toutes les verticales successives.

219. Remarque. — Il résulte de ce que nous venons de dire que, dans les problèmes du mouvement des corps pesants, nous avons implicitement tenu compte du mouvement de rotation de la terre, en remplaçant l'attraction terrestre par la pesanteur.

220. Propriété. — Il est évident que les raisonnements que nous avons faits seront applicables au cas où le point matériel serait soumis à l'action de plusieurs forces. En effet, parmi ces forces figure toujours l'attraction terrestre qui s'exerce sur tous les points à la surface de la terre. Nous aurons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Dans l'étude du mouvement relatif d'un point matériel à la surface de la terre sous l'action de forces et de liaisons quelconques, on peut, avec une approximation suffisante (sauf le cas de grandes vitesses), raisonner comme si la terre était*

en repos, et appliquer les équations du mouvement absolu, pourvu que l'on remplace l'attraction terrestre par la pesanteur.

221. Nous avons vu (n° **214**) que, quand le point est en repos relatif, la force centrifuge composée est nulle. Il en sera de même lorsque le point étant en mouvement, la vitesse relative v_r est parallèle à l'axe du globe. Elle est encore négligeable lorsque la vitesse relative v_r est très petite : car, alors la force centrifuge composée est insensible, pourvu qu'elle n'agisse pas pendant un temps assez long. Sauf ces deux derniers cas, en d'autres termes, lorsque la vitesse relative est très grande, ou lorsque la force centrifuge composée agit dans le même sens pendant un temps assez long, les effets de cette force sont sensibles, et l'on doit en tenir compte dans les équations du mouvement relatif d'un point à la surface de la terre.

222. Étudions donc le *mouvement relatif d'un point matériel à la surface de la terre*. D'après ce que nous avons vu (n° **211**), la force capable de produire l'accélération d'un point dans son mouvement relatif à la surface de la terre, est la résultante : 1° des forces réelles qui agissent sur ce point; 2° de la force d'inertie d'entraînement (c'est la force centrifuge) ; 3° de la force centrifuge composée.

Les forces réelles comprennent les attractions exercées par la terre et les autres corps célestes, et ces actions composées avec la force d'inertie d'entraînement donnent le *poids du corps* que l'on désigne d'ordinaire par mg : les forces réelles comprennent donc le poids du corps, et toutes les autres forces extérieures qui agissent sur ce point.

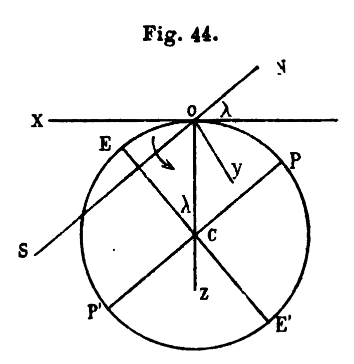
Dans le cas particulier du mouvement relatif d'*un point matériel pesant*, ce point est soumis à l'action

de la pesanteur connue en grandeur et en direction, et à la force centrifuge composée.

223. Cherchons à déterminer les *équations du mouvement de ce point.*

Soient (fig. 44) O l'origine fixe par rapport à la terre, prise dans l'hémisphère nord, PP′ l'axe terrestre, EE′ l'équateur, Oz la verticale que nous supposons dirigée dans le sens de la pesanteur, g l'accélération due à la pesanteur. Rapportons à trois axes rectangulaires, savoir : Oz que nous venons de définir, Ox mené dans le plan horizontal du point O, tangentiellement au méridien, dans la direction du Sud ; Oy tangent au parallèle au point O et dirigé vers l'Est. Soit NS la parallèle à PP′ menée par le point O : la rotation ayant lieu de l'Ouest à l'Est, OS sera, d'après les conventions adoptées, le sens de l'axe de rotation. Soit λ la latitude du point O : c'est le complément de l'angle que fait l'axe de rotation avec la verticale de ce point O.

Fig. 44.



Si nous décomposons la rotation ω suivant les trois axes, nous aurons :

$$p = \omega \cos \lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega \sin \lambda.$$

Les composantes de la force centrifuge composée sont donc :

$$X_c = 2m\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right) = 2m\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt},$$

$$Y_c = 2m\left(p\frac{dz}{dt} - r\frac{dx}{dt}\right) = 2m\omega\left(\cos\lambda \frac{dz}{dt} - \sin\lambda \frac{dx}{dt}\right)$$

$$Z_c = 2m\left(q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt}\right) = -2m\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}.$$

Si nous désignons, en général, par X, Y, Z les composantes de la force extérieure appliquée au mobile, abstraction faite de son poids, qui se réduit à une force mg dirigée suivant l'axe des z,[1] nous aurons pour les équations du mouvement du mobile aux environs du point O :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + 2m\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + 2m\omega\left(\cos\lambda \frac{dz}{dt} - \sin\lambda \frac{dx}{dt}\right)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + mg - 2m\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}.$$

L'intégration de ces équations permet de déterminer x, y, z en fonction de t.

---

1. Nous supposons que le mobile ne s'écarte pas beaucoup du point O, ce qui nous permet de considérer la pesanteur comme constante dans toute l'étendue de la trajectoire.

Applications. — Chute d'un corps pesant.

224. Proposons-nous de trouver le *mouvement d'un point matériel tombant du point* O *sous l'action de la pesanteur seule.*

Nous aurons, dans ce cas, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et les équations du mouvement sont :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= 2\omega \left(\cos\lambda \frac{dz}{dt} - \sin\lambda \frac{dx}{dt}\right), \qquad (1) \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= g - 2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt}.
\end{aligned}$$

Intégrant ces équations, et désignant par a, b, c les composantes de la vitesse relative initiale, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 2\omega y \sin\lambda + a, \\
\frac{dy}{dt} &= 2\omega (z\cos\lambda - x\sin\lambda) + b, \qquad (2) \\
\frac{dz}{dt} &= gt - 2\omega y \cos\lambda + c.
\end{aligned}$$

Éliminant $\frac{dy}{dt}$ entre la première et la troisième des équations (1), on a :

$$\cos\lambda \frac{d^2x}{dt^2} + \sin\lambda \frac{d^2z}{dt^2} = g\sin\lambda,$$

d'où, en intégrant, et observant que, pour $t = 0$, on a $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = a$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = c$, il vient :

$$\cos\lambda \frac{dx}{dt} + \sin\lambda \frac{dz}{dt} = gt\sin\lambda + a\cos\lambda + c\sin\lambda,$$

ou bien, en posant $a\cos\lambda + c\sin\lambda = c_1$,

$$\cos\lambda \frac{dx}{dt} + \sin\lambda \frac{dz}{dt} = gt\sin\lambda + c_1.$$

En intégrant de nouveau, il vient :

$$x\cos\lambda + z\sin\lambda = \frac{1}{2}gt^2\sin\lambda + c_1 t; \qquad (3)$$

nous n'ajoutons pas de constante, parce que x et z sont nuls pour $t = 0$.

Remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs (2) dans la deuxième équation (1), on obtient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 y = 2\omega\,(gt\cos\lambda - a_1),$$

en posant :

$$a_1 = a\sin\lambda - c\cos\lambda.$$

On sait que l'intégrale de cette équation différentielle du second ordre est :

$$y = A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t + \frac{g \cos \lambda}{2\omega} t - \frac{a_1}{2\omega}.$$

Pour déterminer les constantes A et B, faisons $t = 0$; nous aurons :

$$y_0 = 0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = b,$$

et, par suite,

$$A = \frac{a_1}{2\omega}, \quad B = \frac{1}{2\omega}\left(b - \frac{g \cos \lambda}{2\omega}\right).$$

En représentant ces constantes A et B par $G \sin \alpha$ et $G \cos \alpha$, il vient :

$$y = G \sin(2\omega t + \alpha) + \frac{g \cos \lambda}{2\omega} t - \frac{a_1}{2\omega}; \qquad (4)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dy}{dt} = 2\omega G \cos(2\omega t + \alpha) + \frac{g \cos \lambda}{2\omega}.$$

Enfin, si l'on substitue cette dernière valeur de $\frac{dy}{dt}$ dans la seconde équation (2), on trouve :

$$x \sin \lambda - z \cos \lambda = \frac{b}{2\omega} - \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} - G \cos(2\omega t + \alpha),$$

ou bien :

$$x \sin \lambda - z \cos \lambda = \mathrm{G} \cos \alpha - \mathrm{G} \cos (2\omega t + \alpha). \qquad (5)$$

Les équations (3), (4) et (5) donnent la solution complète du problème.

225. Cas particulier. — Supposons la *vitesse initiale nulle ;* nous aurons alors :

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0 ;$$

d'où :

$$a_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \mathrm{G} \sin \alpha = 0, \quad \mathrm{G} \cos \alpha = -\frac{g \cos \lambda}{4\omega^2}.$$

On en tire :

$$\alpha = \pi, \quad \mathrm{G} = \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2}.$$

Introduisons ces conditions dans les équations (3), (4) et (5), et nous aurons les équations suivantes :

$$x \cos \lambda + z \sin \lambda = \frac{1}{2} g t^2 \sin \lambda,$$

$$y = \frac{g \cos \lambda}{2\omega} t - \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} \sin 2\omega t,$$

$$x \sin \lambda - z \cos \lambda = -\frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Développant $\cos 2\omega t$ et $\sin 2\omega t$ suivant les puissances ascendantes de $2\omega t$, et négligeant les termes qui contiennent ω^2 en facteur, nous aurons les équations suivantes :

$$x \cos \lambda + z \sin \lambda = \frac{1}{2} g t^2 \sin \lambda,$$

$$y = \frac{1}{3} g \omega \cos \lambda . t^3,$$

$$x \sin \lambda - z \cos \lambda = - \frac{1}{2} g t^2 \cos \lambda ;$$

d'où l'on tire :

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3} g \omega \cos \lambda . t^3, \quad z = \frac{1}{2} g t^2. \qquad (6)$$

Les formules (6) nous apprennent que, si le temps t reste très petit, y reste toujours très petit ; d'ailleurs, puisque $x = 0$, le mobile reste dans le plan des zy, c'est-à-dire dans un plan normal à la ligne méridienne : il tombe donc *à peu près* suivant la verticale de son point de départ. Mais y, quoique très petit, n'est pas nul ; en outre, il est positif. Il s'ensuit que le mobile éprouve *une petite déviation* de la verticale *dans le sens des y positifs*, c'est-à-dire *vers l'Est*. La grandeur de cette déviation est donnée par la deuxième des formules (6). De la troisième de ces formules il résulte que la projection du mobile sur la verticale aura le même mouvement que si l'on n'avait pas égard à la rotation de la terre.

Il est facile d'obtenir la trajectoire décrite par le mobile dans le plan des zy, en éliminant t entre les deux dernières équations (6), ce qui nous donne :

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{g}} \omega \cos \lambda \,.\, z\sqrt{z}. \qquad (7)$$

Cette trajectoire qui est tangente à la verticale au point de départ est une parabole du degré $\frac{3}{2}$.

La formule (7) permet de calculer la déviation correspondante à une hauteur de chute donnée. Cette formule a été vérifiée par des expériences faites par M. Reich dans un puits de mine à Freyberg. On avait :

$$\lambda = 51^\circ, \quad z = 158^{m},5.$$

Les expériences ont donné une déviation moyenne de $0^{m},0283$, tandis que la formule (7) donne $y = 0^{m},0276$, valeur qui diffère très peu du résultat expérimental.

Remarque. — Si dans les développements de $\sin 2\omega t$ et $\cos 2\omega t$ on tenait compte des termes qui contiennent ω^2 en facteur, on aurait les équations suivantes :

$$x \cos \lambda + z \sin \lambda = \frac{1}{2} g t^2 \sin \lambda,$$

$$x \sin \lambda - z \cos \lambda = -\frac{g \cos \lambda}{2} t^2 + \frac{g \cos \lambda}{6} \omega^2 t^4,$$

$$y = \frac{1}{3} g \omega \cos \lambda \,.\, t^3.$$

On en tire :

$$x = \frac{1}{6} g\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \,.\, t^4.$$

$$y = \frac{1}{3} g\omega \cos\lambda \,.\, t^3,$$

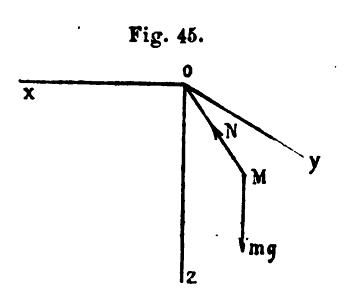
$$z = \frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{6} g\omega^2 \cos^2\lambda \,.\, t^4.$$

La valeur positive de x nous apprend qu'il y a aussi *une petite déviation vers le Sud*, mais cette déviation est insensible.

Pendule Foucault.

226. Proposons-nous d'étudier le *mouvement du pendule, en ayant égard au mouvement de rotation de la terre*, c'est-à-dire le mouvement d'un point matériel pesant attaché au point O par un fil inextensible et sans masse de longueur l (fig. 45). Cela revient au mouvement d'un point pesant sur une sphère de rayon l, invariablement liée à la terre.

Fig. 45.



Les forces qui sollicitent le point supposé libre sont : la pesanteur, parallèle à l'axe Oz, la tension du fil ou la réaction normale de la

surface, que nous désignerons par N, en la rapportant à l'unité de masse, et qui sera dirigée dans le sens MO, enfin la force centrifuge composée.

Il nous suffira donc, d'après ce que nous avons vu (n° **213**), d'ajouter aux composantes de la pesanteur, les composantes de la réaction N qui sont :

$$-\mathrm{N}\frac{x}{l}, \quad -\mathrm{N}\frac{y}{l}, \quad -\mathrm{N}\frac{z}{l},$$

et nous aurons pour les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mathrm{N}\frac{x}{l} + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mathrm{N}\frac{y}{l} + 2\omega\left(\cos\lambda\frac{dz}{dt} - \sin\lambda\frac{dx}{dt}\right), \qquad (1) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - \mathrm{N}\frac{z}{l} - 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

On a, en outre, la relation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \qquad (2)$$

Ces équations (1) et (2) déterminent x, y, z, N en fonction de t, et, par conséquent, le mouvement apparent du pendule.

En posant, pour abréger,

$$k = \omega\sin\lambda, \quad k' = \omega\cos\lambda,$$

les équations (1) deviennent :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2k\frac{dy}{dt} + N\frac{x}{l} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} - 2k'\frac{dz}{dt} + N\frac{y}{l} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2k'\frac{dy}{dt} + N\frac{z}{l} = g.$$

227. Nous allons étudier le cas où les oscillations sont très petites, c'est-à-dire que nous supposerons que le pendule s'écarte très peu de la verticale. Nous considérerons les rapports $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$, comme de très petites quantités dont nous négligerons les carrés et les produits par k et k' qui sont de l'ordre de ω. Nous aurons ainsi :

$$\frac{z}{l} = \left(1 - \frac{x^2}{l^2} - \frac{y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2 + y^2}{l^2} = 1;$$

d'où :

$$z = l, \quad \text{et, par suite,} \quad \frac{dz}{dt} = 0, \ \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

La dernière des équations (3) nous donne alors :

$$N = g - 2k'\frac{dy}{dt}.$$

On a, par conséquent,

$$\frac{Nx}{l} = \frac{gx}{l} - 2k'\frac{x}{l}\frac{dy}{dt},$$

et, en négligeant, comme nous l'avons dit, le produit $k'\frac{x}{l}$, il vient :

$$\frac{Nx}{l} = \frac{gx}{l};$$

de même,

$$\frac{Ny}{l} = \frac{gy}{l}.$$

Les équations (3) nous donnent alors les suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2k\frac{dy}{dt} + \frac{gx}{l} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \frac{gy}{l} = 0,$$

ou bien, en posant $\frac{g}{l} = h^2$,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} - 2k\frac{dy}{dt} + h^2x = 0, \\ &\frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + h^2y = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ces équations (4) déterminent le mouvement de la projection du point M sur le plan des xy.

En éliminant y entre ces équations (4), et négligeant les puissances de k supérieures à la première vis-à-vis des quantités finies, il vient :

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2h^2\frac{d^2x}{dt^2} + h^4x = 0. \quad (5)$$

L'équation caractéristique est :

$$x^4 + 2h^2x^2 + h^4 = 0;$$

elle a deux racines doubles imaginaires et égales à $\pm h\sqrt{-1}$.

L'intégrale de l'équation (5) est donc :

$$x = A \sin(ht + \alpha) + Bt \sin(ht + \beta); \qquad (6)$$

les constantes A, B, α, β sont déterminées par les circonstances initiales du mouvement.

Supposons que pour $t = 0$, on ait $x = 0$, $y = y_0$ et que la vitesse initiale soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0$; les équations (4) nous donnent alors, pour $t = 0$,

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 = -h^2y_0.$$

Or, de l'équation (6) on tire :

$$\frac{dx}{dt} = h\left\{A\cos(ht + \alpha) + Bt\cos(ht + \beta)\right\} + B\sin(ht + \beta), \quad (7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h^2x = 2Bh\cos(ht + \beta),$$

ou bien, à cause de la première équation (4) :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Bh}{k}\cos(ht + \beta), \qquad (8)$$

et, par suite,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Bh^2}{k}\sin(ht+\beta). \qquad (9)$$

Nous aurons donc, en faisant $t = 0$ dans les équations (6), (7), (8) et (9) :

$$0 = A\sin\alpha, \quad 0 = hA\cos\alpha + B\sin\beta,$$

$$0 = \frac{Bh}{k}\cos\beta, \quad -h^2y_0 = -\frac{Bh^2}{k}\sin\beta.$$

Comme il résulte de la deuxième et de la quatrième de ces équations que les constantes A et B ne peuvent être nulles, les deux autres équations nous donnent :

$$\sin\alpha = 0, \quad \text{et} \quad \cos\beta = 0, \quad \text{d'où :} \quad \alpha = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{2};$$

par suite,

$$A = -\frac{ky_0}{h}, \quad B = ky_0.$$

Les équations du mouvement projeté sur le méridien et le parallèle du lieu sont donc :

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{ky_0}{h}(\sin ht - ht\cos ht), \\ y &= y_0\cos ht. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Il s'ensuit que le mouvement projeté sur le parallèle est celui d'un pendule simple de longueur l, abandonné

à lui-même à une distance y_0 de la verticale. On en conclut encore que la durée d'une double oscillation est :

$$T = \frac{2\pi}{h} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

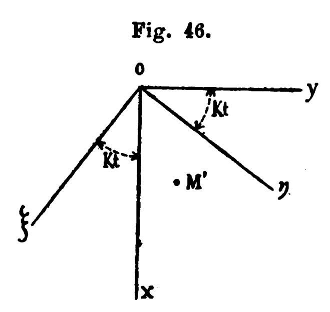
En éliminant t entre les équations (10), on trouve pour la trajectoire du mouvement projeté sur le plan des xy :

$$x = \frac{k}{h}\left(y \arc\cos\frac{y}{y_0} \mp \sqrt{y_0^2 - y^2}\right). \qquad (11)$$

Dans le mouvement direct du pendule, ht varie de 0 à π, et, par conséquent, $\sin ht$ est positif ; dans le mouvement rétrograde, ht variant de π à 2π, on a $\sin ht < 0$. Donc, dans l'équation (11) on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur, suivant que le mouvement sera direct ou rétrograde. D'ailleurs, comme l'équation (11) reste la même, quand on y change simultanément les signes de x et de y, il en résulte que cette courbe a pour centre l'origine.

228. Pour nous rendre compte du mouvement, rapportons-le à deux axes rectangulaires mobiles $O\xi$, $O\eta$ tournant dans le sens de Oy vers Ox, c'est-à-dire en sens inverse du mouvement de la terre sur l'horizon avec une vitesse $-k$ (fig. 46). Au bout du temps t ces axes feront avec Ox des angles égaux à kt et $\frac{\pi}{2} - kt$, et nous aurons pour les coordonnées relatives du point M' rapporté à ces axes :

Fig. 46.



$$\xi = x \cos kt - y \sin kt,$$

$$\eta = x \sin kt + y \cos kt,$$

ou bien, en négligeant les puissances de k supérieures à la première :

$$\xi = x - kty = \frac{ky_0}{h} \sin ht,$$

$$\eta = ktx + y = y_0 \cos ht.$$

Ces équations déterminent le mouvement de la projection M' par rapport aux axes $O\xi$ et $O\eta$.

En éliminant t entre ces deux dernières, on a pour l'équation de la trajectoire relative par rapport aux axes $O\xi$ et $O\eta$:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{ky_0}{h}\right)^2} + \frac{\eta^2}{y_0^2} = 1.$$

Cette trajectoire est donc une ellipse ayant pour centre l'origine et dont les demi axes, dirigés suivant $O\xi$ et $O\eta$, sont respectivement égaux à $\frac{ky_0}{h}$ et y_0 ; le premier est très petit par rapport au second à cause de la petitesse du rapport $\frac{k}{h}$.

On conclut de là que *la projection sur l'horizon du point mobile décrit une ellipse mobile très allongée dont le grand axe est animé d'un mouvement lent de rotation autour de la verticale du point de suspension, en allant de l'Est à l'Ouest en passant par le Sud, et de l'Ouest à l'Est en passant par le Nord. La vitesse angulaire k*

de cette rotation est constante et égale à celle de la rotation terrestre multipliée par le sinus de la latitude du lieu d'observation.

L'ellipse relative est donc décrite toute entière entre deux plans verticaux parallèles et distants de $\frac{2k}{h} y_0$, et animés du mouvement de rotation que nous venons d'indiquer. Ces plans étant très rapprochés l'un de l'autre, paraissent n'en former qu'un seul, celui du pendule, qui, dans l'expérience, tourne d'un mouvement uniforme autour de la verticale de l'Est à l'Ouest en passant par le Sud en sens inverse du mouvement de la terre, avec une vitesse angulaire $k = \omega \sin \lambda$. C'est ce phénomène de la déviation du plan d'oscillation du pendule libre que Foucault a mis en évidence au Panthéon de Paris.

Extension des théorèmes généraux au mouvement relatif.

229. Les théorèmes généraux s'appliquent au mouvement d'un système par rapport à des axes mobiles, pourvu que l'on joigne en chaque point aux forces réellement appliquées les deux forces fictives qui permettent de considérer le mouvement relatif de chacun des points du système comme un mouvement absolu. Ces forces fictives sont la force d'inertie d'entraînement et la force centrifuge composée (n° **211**).

Nous devons observer cependant que, dans l'application du théorème des forces vives au mouvement

relatif, les forces centrifuges composées disparaissent d'elles-mêmes. En effet, le travail de chacune d'elles est nul (n° **215**).

Nous remarquerons aussi que, dans le cas où les axes mobiles auxquels on rapporte le mouvement du système se meuvent parallèlement à eux-mêmes, les forces centrifuges composées sont nulles (n° **214**), et, par conséquent, les forces fictives se réduisent aux forces d'inertie d'entraînement. Enfin, si le mouvement d'entraînement est une translation rectiligne et uniforme, les forces d'inertie d'entraînement sont nulles, et, dans ce cas, les théorèmes généraux s'appliquent au mouvement relatif comme au mouvement absolu, sans que l'on ait besoin de joindre les forces fictives aux forces qui agissent réellement sur le système.

230. Supposons que l'on rapporte le mouvement à des axes mobiles de direction constante menés par le centre de gravité, et voyons ce qui va en résulter pour les théorèmes généraux.

Nous avons déjà vu (n^{os} **189** et **207**) que les deux derniers théorèmes sont applicables au mouvement relatif autour du centre de gravité. Nous retrouverons cette propriété par l'application de la méthode actuelle.

D'abord, puisque les axes mobiles ne sont animés que d'un mouvement de translation, le mouvement d'entraînement est une translation dans laquelle chaque point décrit une trajectoire égale et parallèle à celle que décrit le centre de gravité ; les forces centrifuges composées sont nulles en chaque point, comme nous l'avons dit (n° **214**), et, par conséquent, il n'y a pas lieu de s'en occuper. Quant aux forces d'inertie d'entraînement, elles sont toutes parallèles et de sens contraire à l'accélération totale du centre de gravité

du système dans le mouvement absolu. Chacune de ces forces est égale au produit de la masse du point matériel auquel elle se rapporte par l'accélération absolue du centre de gravité prise en sens contraire.

Ceci établi, étudions ce qui résulte de l'introduction des forces apparentes dans les équations des théorèmes généraux.

231. En ce qui concerne le *théorème du mouvement du centre de gravité*, désignons, comme précédemment, par X, Y, Z les composantes suivant les axes de la force extérieure au point m, par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes fixes ; les composantes de l'accélération absolue de ce point sont $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$; donc, (n° **230**), les composantes de la force d'inertie d'entraînement pour le point m du système sont $-m\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z_1}{dt^2}$.

Si donc, en chaque point du système, nous joignons à la force X, Y, Z, la force $-m\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z_1}{dt^2}$, nous pourrons traiter le mouvement relatif du système comme un mouvement absolu.

Si donc nous désignons par $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ les composantes de l'accélération *relative* du centre de gravité, et si nous appliquons les équations du mouvement du centre de gravité (n° **178**), nous devrons remplacer dans les seconds membres de ces équations ΣX, ΣY et ΣZ par $\Sigma X - \frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m$, $\Sigma Y - \frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m$, $\Sigma Z - \frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m$, et les premiers membres par $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, et nous aurons les équations :

$$\Sigma X - \frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m = \frac{d^2\xi}{dt^2}\Sigma m,$$

$$\Sigma Y - \frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m = \frac{d^2\eta}{dt^2}\Sigma m,$$

$$\Sigma Z - \frac{d^2z_1}{dt^2}\Sigma m = \frac{d^2\zeta}{dt^2}\Sigma m.$$

Or, les premiers membres de ces trois équations sont nuls en vertu du théorème du mouvement *absolu* du centre de gravité (n° **178**), et, par suite, on a :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0;$$

donc, l'accélération relative du centre de gravité est nulle, ce qui est d'ailleurs évident, puisque le centre de gravité est en repos relatif.

232. Passons maintenant au *théorème des quantités de mouvement projetées* sur un axe quelconque, par exemple sur l'axe des x.

En désignant par X la composante suivant l'axe des x de la force extérieure au point m, par x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes fixes, $-m\frac{d^2x_1}{dt^2}$ sera la force d'inertie d'entraînement pour le point m, suivant l'axe des x ; soient, en outre, $\frac{dx}{dt}$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ les composantes de la vitesse relative du point m aux époques t et 0, nous aurons, en introduisant les forces d'inertie d'entraînement, et en considérant alors le mouvement relatif comme un mouvement absolu :

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \sum \int_0^t X dt - \sum \int_0^t m \frac{d^2x_1}{dt^2} dt.$$

Or, puisque $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ est le même à chaque instant pour tous les points du système, nous aurons :

$$\sum \int_0^t m \frac{d^2x_1}{dt^2} dt = \int_0^t \frac{d^2x_1}{dt^2} dt \,.\, \Sigma m = \int_0^t M \frac{d^2x_1}{dt^2} dt$$

$$= M \left[\frac{dx_1}{dt} - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0\right],$$

et, par suite,

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \sum \int_0^t X dt - M \left[\frac{dx_1}{dt} - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0\right].$$

Mais, on sait (n° **178**) que, dans le mouvement absolu d'un système, le centre de gravité se meut comme si la masse totale y était concentrée et les forces transportées parallèlement à elles-mêmes. Nous aurons donc, en appliquant le second théorème général au mouvement absolu de ce point matériel (x_1, y_1, z_1) de masse M (n° **22**) :

$$M \left[\frac{dx_1}{dt} - \left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0\right] = \sum \int_0^t X dt,$$

et, par conséquent,

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} - \Sigma m \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0.$$

Donc, *dans le mouvement relatif, l'accroissement de la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque est nul ; en d'autres termes, la somme des projections des quantités de mouvement relatives à un axe quelconque reste constante pendant toute la durée du mouvement.*

Il est facile de s'assurer que cette somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque est nulle. En effet, x, y, z étant les coordonnées d'un point du système par rapport aux axes mobiles du centre de gravité, on a :

$$\Sigma mx = 0, \quad \text{d'où :} \quad \Sigma m \frac{dx}{dt} = 0.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans le mouvement relatif considéré, la somme des quantités de mouvement projetées sur un axe quelconque est nulle pendant toute la durée du mouvement.*

233. Appliquons maintenant le *théorème des moments des quantités* de mouvement, et prenons les moments par rapport aux axes mobiles passant par le centre de gravité.

D'abord, les forces d'inertie d'entraînement des différents points étant parallèles et proportionnelles aux masses de ces points (n° **230**), elles se composent en une force unique passant par le centre de gravité. La somme des moments de ces forces par rapport à un axe quelconque est égale au moment de leur résultante ; d'ailleurs, si l'axe par rapport auquel on prend les moments passe par le centre de gravité, le moment de la résultante est nul, et, par conséquent, la somme des moments des forces d'inertie d'entraînement par

rapport à cet axe est nulle. Donc, il n'y a pas lieu, dans les équations des moments des quantités de mouvement, de tenir compte des forces d'inertie d'entraînement.

D'ailleurs, comme nous l'avons dit (nº **214**), puisque les axes mobiles se meuvent parallèlement à eux-mêmes, il n'y a pas lieu de tenir compte des forces centrifuges composées.

Par conséquent, *les équations des moments des quantités de mouvement dans le mouvement relatif ne diffèrent pas des équations analogues dans le mouvement absolu*, c'est-à-dire que l'on n'a à tenir compte que des forces qui agissent réellement.

234. Il en résulte que toutes les propriétés que nous avons déduites du théorème des moments des quantités de mouvement dans le mouvement absolu s'appliquent au mouvement relatif rapporté au centre de gravité. Tel est le théorème de M. Resal (nº **186**).

En particulier, si les forces extérieures réellement appliquées ont une résultante nulle, ou si cette résultante passe par le centre de gravité, *le théorème des aires* s'appliquera au mouvement relatif rapporté au centre de gravité comme au mouvement absolu. Le *plan du maximum des aires* conserve une direction constante dans l'espace, et la somme des aires projetées sur ce plan, à partir d'un instant donné, varie proportionnellement au temps. Ce cas se présente dans le système planétaire, composé du Soleil et des planètes. Les forces extérieures provenant des étoiles peuvent, à cause du grand éloignement des étoiles, être considérées comme des forces parallèles et proportionnelles aux masses, et, par conséquent, la résultante de ces forces passe par le centre de gravité du système. Il y a donc un *plan invariable* dans le mouvement relatif du Soleil

et des planètes autour de leur centre de gravité commun. C'est le *plan invariable de Laplace.*

235. Enfin, le *théorème des forces vives* s'applique aussi au mouvement du système par rapport à des axes mobiles de direction constante passant par le centre de gravité, sans qu'il soit nécessaire de joindre les forces fictives. En effet, si nous voulons appliquer le théorème des forces vives à ce mouvement, il faudra joindre à la somme des travaux des forces extérieures et des forces intérieures, les travaux des forces d'inertie d'entraînement et des forces centrifuges composées. Or, les forces d'inertie d'entraînement étant parallèles et proportionnelles aux masses, ont une résultante égale à leur somme et appliquée au centre de gravité, et, par suite, la somme des travaux de ces forces est égale au travail de la résultante. Mais, le déplacement du centre de gravité par rapport aux axes mobiles étant constamment nul, le travail de la résultante est nul, et, par conséquent, la somme des travaux des forces d'inertie d'entraînement est nulle. D'ailleurs, comme nous l'avons dit (n° **215**), les travaux des forces centrifuges composées sont nuls.

Par conséquent, *le théorème des forces vives s'applique au mouvement relatif d'un système par rapport à des axes mobiles de direction constante menés par le centre de gravité*, sans qu'il y ait lieu de tenir compte des forces fictives.

Ainsi, en résumé, lorsque le mouvement est rapporté à des axes mobiles de direction constante menés par le centre de gravité, les deux derniers théorèmes généraux sont applicables au mouvement relatif sans qu'il soit nécessaire de tenir compte des forces fictives.

236. Remarque. — Nous avons déjà vu (n° **214**) qu'il en sera de même, quels que soient les axes

mobiles, si le mouvement relatif est rapporté à des axes animés d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Tous les théorèmes généraux seront applicables au mouvement relatif sans qu'il soit nécessaire de joindre aux forces réelles les forces fictives, puisque ces dernières sont toutes nulles.

237. Étudions encore le cas où le *mouvement d'entraînement* des axes mobiles auxquels on rapporte le mouvement est un *mouvement de rotation uniforme* autour d'un axe fixe.

Dans ce cas, la force d'inertie d'entraînement se réduit pour chaque point à la force centrifuge $m\omega^2 r$ (I, n° **164**); la force centrifuge composée n'est pas nulle, et l'on peut en déterminer la valeur. Il résulte de là que les forces fictives doivent être introduites dans les équations des théorèmes généraux.

En ce qui concerne le troisième théorème général, si l'on prend les moments par rapport à l'axe de rotation, les moments des forces centrifuges $m\omega^2 r$ sont nuls ; mais, il n'en est pas de même, en général, des moments des forces centrifuges composées.

Quant au quatrième théorème, n'oublions pas (n° **215**) que, quel que soit le mouvement d'entraînement, les forces centrifuges composées n'entrent jamais dans l'équation des forces vives, puisque le travail de chacune de ces forces est nul.

D'ailleurs, il est évident que la somme :

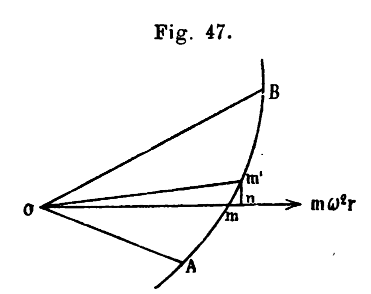
$$2m \left\{ \left(r \frac{dy}{dt} - q \frac{dz}{dt} \right) dx + \left(p \frac{dz}{dt} - r \frac{dx}{dt} \right) dy + \left(q \frac{dx}{dt} - p \frac{dy}{dt} \right) dz \right\},$$

est identiquement nulle.

Ainsi donc, dans le cas où le mouvement d'entraînement est une rotation uniforme autour d'un axe fixe, on doit seulement, dans l'application de l'équation des forces vives au mouvement relatif, tenir compte du travail de la force $m\omega^2 r$ en chaque point. Proposons-nous de trouver le travail de cette force.

Soient O la projection de l'axe fixe, AB la trajectoire relative du point m, et m' la position du mobile infiniment voisine de m (fig. 47). Le travail élémentaire de la force $m\omega^2 r$ est :

Fig. 47.



$$m\omega^2 r \,.\, mn = m\omega^2 r dr.$$

La somme des travaux élémentaires de cette force entre les deux positions A et B du mobile est :

$$\frac{1}{2}\, m\omega^2 (r_1^2 - r_0^2) = \frac{1}{2}\, m\, (w_1^2 - w_0^2),$$

en désignant par w_0 et w_1 les vitesses linéaires d'entraînement aux points A et B.

CHAPITRE VI.

Mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe sous l'action d'une percussion.

238. PROBLÈME. — *Un corps solide est retenu par un axe fixe autour duquel il peut tourner. Ce corps étant en repos, est sollicité par une percussion. On demande de trouver les propriétés du mouvement.*

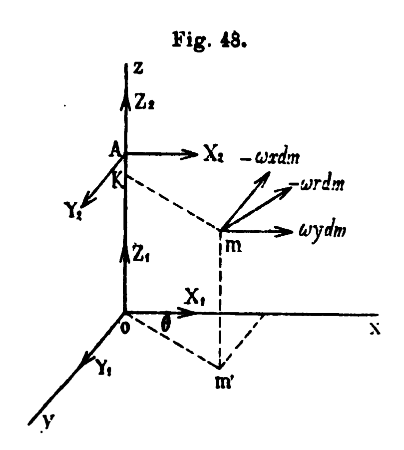
La force instantanée qui met le corps en mouvement produira un effort sur l'axe : cet effort sera une sorte de choc ou de percussion. Nous aurons donc à déterminer la vitesse angulaire initiale ω, et les percussions exercées sur l'axe.

En vertu du principe de d'Alembert, étendu aux forces instantanées (n° **172**), il y a équilibre, au moyen des liaisons, c'est-à-dire de l'axe, entre la force instantanée et les quantités de mouvement initiales et finales, ces dernières prises en sens contraires. Or, le corps partant du repos, les quantités de mouvement initiales sont nulles ; d'autre part, nous pouvons rendre le corps libre, en introduisant les réactions de deux points fixes sur l'axe, réactions qui

sont égales et de sens contraires aux percussions exercées sur ces points. Nous aurons alors à écrire qu'il y a équilibre entre la force instantanée, les réactions des points fixes, et les quantités de mouvement finales prises en sens contraires.

Prenons l'un des deux points fixes pour origine, l'axe des z passant par les deux points O et A, et soit $OA = h$ la distance des deux points (fig. 48). Soient X_1, Y_1, Z_1 les composantes de la réaction au point O, et X_2, Y_2, Z_2 les composantes de la réaction au point A, X, Y, Z les composantes de la percussion, ξ, η, ζ les coordonnées de son point d'application. Nous supposerons que le mouvement s'effectue dans le sens des rotations positives.

Fig. 48.



Si nous désignons par ω la vitesse angulaire commune à tous les points du corps, la vitesse linéaire d'un point m (x, y, z) situé à une distance r de l'axe sera ωr, sa quantité de mouvement sera $\omega r dm$, dirigée suivant la tangente au cercle décrit par le point m : c'est la force qu'il faudrait appliquer au point *m libre et au repos* pour lui communiquer la vitesse angulaire ω pendant l'unité de temps. Cette quantité de mouvement prise en sens contraire est $-\omega r dm$: elle a pour composantes suivant l'axe des x, $\omega r dm \sin \theta$, et suivant l'axe des y, $-\omega r dm \cos \theta$, en désignant par θ l'angle que le rayon mK, ou m'O fait avec le plan des zx ; la composante suivant l'axe des z est nulle.

Or, on a évidemment :

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r};$$

par conséquent, les composantes de $-\omega r dm$ suivant les axes des x et des y sont respectivement : $\omega y dm$ et $-\omega x dm$.

Nous aurons des résultats analogues pour chacun des points du corps.

Si nous transportons toutes ces forces à l'origine, nous aurons suivant les axes des x et des y les forces :

$$\omega \int y dm = \omega M y_1, \quad -\omega \int x dm = -\omega M x_1,$$

en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du corps, et dans les trois plans coordonnés les trois couples :

$$\omega \int xz dm, \quad \omega \int yz dm, \quad \text{et} \quad -\omega \int (x^2 + y^2)\, dm = -\omega \int r^2 dm.$$

La force instantanée transportée à l'origine nous donne les trois composantes : X, Y, Z, et les trois couples :

$$Z\eta - Y\zeta, \quad X\zeta - Z\xi, \quad Y\xi - X\eta\,;$$ [1]

1. Il est bon d'observer que les forces X, Y, Z, et leurs couples sont ici les impulsions $\int_0^\theta X dt$, $\int_0^\theta Y dt$, $\int_0^\theta Z dt$, et des couples d'impulsion. On représente les impulsions par une seule lettre pour simplifier les notations.

les forces X_2, Y_2, Z_2, transportées à l'origine nous donnent les trois composantes :

$$X_2, Y_2, Z_2,$$

et les deux couples :

$$-Y_2 h, \quad X_2 h,$$

situés respectivement dans les plans des yz et des zx.

En appliquant le théorème de d'Alembert, nous aurons les six équations suivantes :

$$X + X_1 + X_2 + \omega M y_1 = 0, \tag{1}$$

$$Y + Y_1 + Y_2 - \omega M x_1 = 0, \tag{2}$$

$$Z + Z_1 + Z_2 = 0, \tag{3}$$

$$Z\eta - Y\zeta + \omega \int xz dm - Y_2 h = 0, \tag{4}$$

$$X\zeta - Z\xi + \omega \int yz dm + X_2 h = 0, \tag{5}$$

$$Y\xi - X\eta - \omega \int r^2 dm = 0. \tag{6}$$

La dernière équation (6) qui ne contient pas les composantes des réactions inconnues des points fixes, est *l'équation du mouvement :* elle servira à déterminer la vitesse angulaire ω. On en tire :

$$\omega = \frac{Y\xi - X\eta}{\int r^2 dm}.$$

Par conséquent, *la vitesse angulaire* ω *à la fin de la percussion est égale au moment de la percussion par rapport à l'axe de rotation divisé par le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe.*

Les équations (4) et (5) serviront à déterminer les valeurs de X_2, Y_2, et les équations (1) et (2) nous donneront ensuite X_1, Y_1 ; enfin, l'équation (3) détermine la somme $Z_1 + Z_2$.

Les valeurs de X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, prises en signes contraires, nous donnent les composantes des percussions exercées sur l'axe. Comme on le voit, la percussion dans le sens de l'axe, ou la *percussion longitudinale* $-(Z_1 + Z_2)$ est égale à la composante de la force instantanée suivant cet axe.

Centre de percussion.

239. Proposons-nous maintenant de *trouver les conditions pour que l'axe n'éprouve aucune percussion.* Nous supposerons, pour plus de simplicité, que l'on prenne pour plan des zx le plan passant par l'axe de rotation et le centre de gravité du corps, et pour plan des xy le plan mené par le point d'application de la force instantanée perpendiculairement à l'axe de rotation. Nous aurons alors $y_1 = 0$, $\zeta = 0$, et les équations du mouvement nous donnent :

$$X + X_1 + X_2 = 0,$$

$$Y + Y_1 + Y_2 - \omega M x_1 = 0,$$

$$Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$Z\eta + \omega \int xz\,dm - Y_2 h = 0,$$

$$-Z\xi + \omega \int yz\,dm + X_2 h = 0,$$

$$Y\xi - X\eta - \omega \int r^2 dm = 0.$$

Or, si dans ces équations on pose :

$$X_1 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Z_2 = 0,$$

nous aurons les équations suivantes :

$$X = 0, \quad Y = \omega M x_1, \quad Z = 0,$$

$$\int xz dm = 0, \quad \int yz dm = 0, \quad Y\xi = \omega \int r^2 dm.$$

Les équations $X = 0$, $Z = 0$, nous apprennent que *la force instantanée doit être perpendiculaire au plan des zx*, c'est-à-dire *au plan passant par l'axe de rotation et par le centre de gravité du corps.*

Des équations $\int xz dm = 0$, $\int yz dm = 0$, on conclut que l'*axe de rotation doit être principal* pour l'origine déterminée par le plan des xy, mené, comme nous l'avons fait, perpendiculairement à l'axe par le point où la force de percussion rencontre le corps.

D'ailleurs, puisque la force doit être perpendiculaire au plan des zx, et que son point d'application est dans le plan des xy, elle sera elle-même dans le plan des xy, et elle sera parallèle à l'axe des y. L'équation :

$$Y\xi = \omega \int r^2 dm,$$

nous donnera alors *la distance de la force à l'axe ;* cette distance étant évidemment égale à ξ, nous aurons :

$$\xi = \frac{\omega \int r^2 dm}{Y} = \frac{\int r^2 dm}{M x_1}.$$

Or, si nous désignons par I_g le moment d'inertie du corps par rapport à un axe mené par son centre

de gravité parallèlement à l'axe de rotation, nous aurons (nº **141**) :

$$\int r^2 dm = I_g + Mx_1^2;$$

par conséquent,

$$\xi = x_1 + \frac{I_g}{Mx_1}.$$

Le point ainsi déterminé est ce que l'on appelle *le centre de percussion :* c'est *le point où la force doit être appliquée dans le plan passant par l'axe et par le centre de gravité du corps pour que l'axe ne subisse aucune percussion.*

Donc, pour que l'axe ne subisse aucune percussion, il faut et il suffit :

1° *Que la direction de la force instantanée soit perpendiculaire au plan qui passe par l'axe fixe et par le centre de gravité du corps.*

2° *Cet axe de rotation doit être principal pour le point où il rencontre le plan qui lui est perpendiculaire et qui contient la force.*

3° *La distance de cette force à l'axe (ou la distance du centre de percussion à l'axe) doit être égale à* $x_1 + \frac{I_g}{Mx_1}$. *L'intensité de cette force est égale à* $\omega M x_1$.

Remarque I. — On voit que la question proposée serait impossible, si l'axe de rotation passait par le centre de gravité du corps. En effet, pour qu'il n'y ait pas de percussion exercée sur l'axe, il faut que la force de percussion appliquée au corps soit $Y = \omega M x_1$;

or, si l'axe de rotation passe par le centre de gravité du corps, $x_1 = 0$, et, par conséquent, $Y = 0$. D'ailleurs, on a alors $\xi = \infty$, et le centre de percussion serait à l'infini.

REMARQUE II. — Si l'axe de rotation n'est principal pour aucune origine prise sur sa direction, il n'y aura pas de centre de percussion relatif à cet axe.

Mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe, sous l'action de forces quelconques.

240. Proposons-nous maintenant d'étudier le *mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe, et sollicité par des forces motrices quelconques qui agissent d'une manière continue.*

Nous avons à déterminer la vitesse angulaire à un instant quelconque du mouvement, et les pressions exercées sur l'axe à chaque instant, pressions qu'il faut bien distinguer des percussions initiales.

Nous pouvons rendre le corps entièrement libre, en introduisant les réactions de deux points fixes O et A pris sur cet axe, réactions qui sont égales et de sens contraires aux pressions exercées sur ces deux points à chaque instant du mouvement.

Nous appliquerons le principe de d'Alembert, et nous écrirons qu'il y a équilibre à chaque instant entre les forces motrices, les réactions des points fixes et les forces d'inertie des différents points.

Prenons l'un des points fixes O pour origine, l'axe des z passant par les deux points O et A, et désignons par $OA = h$ la distance des deux points fixes. Soient X, Y, Z les composantes de la force motrice P, qui agit en un point m (x, y, z) du corps, X_1, Y_1, Z_1, les composantes de la réaction du point O, X_2, Y_2, Z_2 les composantes de la réaction du point A; les composantes de la force d'inertie du point m sont : $-\frac{d^2x}{dt^2}dm$, $-\frac{d^2y}{dt^2}dm$, $-\frac{d^2z}{dt^2}dm$. Nous aurons donc les six équations suivantes :

$$\Sigma X + X_1 + X_2 - \int \frac{d^2x}{dt^2}dm = 0,$$

$$\Sigma Y + Y_1 + Y_2 - \int \frac{d^2y}{dt^2}dm = 0,$$

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 - \int \frac{d^2z}{dt^2}dm = 0,$$

$$\Sigma (Zy - Yz) - Y_2h - \int \left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)dm = 0,$$

$$\Sigma (Xz - Zx) + X_2h - \int \left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right)dm = 0,$$

$$\Sigma (Yx - Xy) - \int \left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)dm = 0.$$

Or, l'axe de rotation étant pris pour axe des z, et ω étant la vitesse angulaire de la rotation à la fin du temps t, la vitesse du point m est $v = \omega r$; ses composantes sont, puisqu'elle est perpendiculaire à l'axe des z :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

On en tire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega\frac{dy}{dt} = -\omega^2 x - y\frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dx}{dt} = -\omega^2 y + x\frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

En substituant dans les équations précédentes, et désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du corps, il vient :

$$\Sigma X + X_1 + X_2 + \frac{d\omega}{dt} My_1 + \omega^2 Mx_1 = 0, \quad (1)$$

$$\Sigma Y + Y_1 + Y_2 - \frac{d\omega}{dt} Mx_1 + \omega^2 My_1 = 0, \quad (2)$$

$$\Sigma Z + Z_1 + Z_2 = 0, \quad (3)$$

$$\Sigma(Zy - Yz) + \frac{d\omega}{dt}\int xz\,dm - \omega^2\int yz\,dm - Y_2 h = 0, \quad (4)$$

$$\Sigma(Xz - Zx) + \frac{d\omega}{dt}\int yz\,dm + \omega^2\int xz\,dm + X_2 h = 0, \quad (5)$$

$$\Sigma(Yx - Xy) - \frac{d\omega}{dt}\int r^2 dm = 0. \quad (6)$$

L'équation (6) ne contient pas les composantes des réactions inconnues des points fixes. C'est *l'équation du mouvement.*

On en tire :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma\,(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)}{\int r^2 dm};$$

cette équation servira à déterminer *la vitesse angulaire à la fin du temps t.*

Les équations (4) et (5) nous donneront les composantes X_2, Y_2 de la réaction du point A : on voit que ces composantes sont en raison inverse de la distance h. Ces valeurs de X_2, Y_2 étant connues, les équations (1) et (2) nous donneront les composantes X_1, Y_1 de la réaction du point O. Enfin, l'équation (3) nous donne la somme $Z_1 + Z_2$ des réactions suivant l'axe de rotation, sans que l'on puisse déterminer en particulier ces deux composantes. Les valeurs de X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 prises en signes contraires sont les composantes des pressions aux points O et A.

241. Cas particuliers. — 1° *Si le corps solide n'est sollicité par aucune force motrice, ou si ces forces se font équilibre*, on a :

$$\Sigma \mathrm{X} = 0, \quad \Sigma \mathrm{Y} = 0, \quad \Sigma \mathrm{Z} = 0,$$

$$\Sigma\,(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z) = 0, \quad \Sigma\,(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x) = 0, \quad \Sigma\,(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) = 0.$$

L'équation (6) nous donne alors $\frac{d\omega}{dt} = 0$; par conséquent, $\omega =$ *const.*, c'est-à-dire que *la vitesse angulaire est constante : le mouvement de rotation est uniforme.* On a alors :

$$X_1 + X_2 + \omega^2 M x_1 = 0,$$

$$Y_1 + Y_2 + \omega^2 M y_1 = 0,$$

$$Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\omega^2 \int yzdm + Y_2 h = 0,$$

$$\omega^2 \int xzdm + X_2 h = 0.$$

L'équation $Z_1 + Z_2 = 0$ nous apprend que les ***réactions*** se réduisent à ***deux forces perpendiculaires à l'axe***, puisque la somme de leurs composantes parallèles à l'axe est nulle.

Il est facile de voir que, dans ce cas, les réactions de l'axe font équilibre aux *forces centrifuges* de tous les points du corps. En effet, puisque l'on a $\frac{d\omega}{dt} = 0$, il en résulte que la composante tangentielle de la force d'inertie, en chaque point, est nulle, cette composante ayant pour expression $-\frac{dv}{dt}dm = -r\frac{d\omega}{dt}dm$.

Remarque I. — Si l'axe de rotation est principal pour le point O, on a (n° **145**) :

$$\int xzdm = 0, \quad \int yzdm = 0;$$

par suite, $X_2 = 0$, $Y_2 = 0$, quelle que soit la vitesse angulaire ω. Par conséquent, ***le point A n'éprouve aucune pression***. On peut donc supprimer la fixité du point A, puisque ce point n'a à supporter aucune pression.

Donc, ***si un corps retenu par un seul point fixe O, commence à tourner autour de l'un des axes principaux relatifs à ce point, sans qu'aucune force étrangère lui***

soit appliquée, il continuera à tourner uniformément autour de cet axe, comme s'il était fixe. Les trois axes principaux passant par un point fixe s'appellent, pour cette raison, ***axes permanents de rotation*** relativement à ce point.

D'ailleurs, dans ce cas, les équations précédentes nous donnent :

$$X_1 = -\omega^2 M x_1, \quad Y_1 = -\omega^2 M y_1,$$

d'où, en désignant par R_1 la pression exercée sur le point O, et par r_1 la distance du centre de gravité à l'axe :

$$R_1 = \omega^2 M r_1 ;$$

on a d'ailleurs :

$$\frac{X_1}{Y_1} = \frac{x_1}{y_1}.$$

Par conséquent, *la force* R_1 *ou la pression sur le point* O *est dirigée dans le plan passant par le centre de gravité et l'axe de rotation.*

Remarque II. — Si l'axe de rotation est un axe principal passant par le centre de gravité du corps, on a :

$$\int xz\,dm = 0, \quad \int yz\,dm = 0, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0,$$

et il vient alors :

$$X_2 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad X_1 = 0, \quad Y_1 = 0 ;$$

le point O ne supporte non plus aucune pression, et l'on peut aussi supprimer la fixité de ce point O : le mouvement ayant commencé autour de l'axe supposé fixe,

continuera uniformément autour du même axe lorsqu'on le rendra entièrement libre.

Donc, *si un corps entièrement libre commence à tourner autour d'un de ses axes principaux du centre de gravité, et qu'aucune force étrangère ne lui soit appliquée, son mouvement continuera uniformément autour de cet axe.* Ces droites sont les seules qui jouissent de cette propriété. Ces trois axes s'appellent *axes naturels de rotation*, ou *axes permanents de rotation relatifs au centre de gravité.*

242. 2° *Si les forces extérieures se réduisent à un couple perpendiculaire à l'axe de rotation*, on a :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma (Xz - Zx) = 0.$$

Dans ce cas, la vitesse angulaire est donnée par la formule :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma (Yx - Xy)}{\int r^2 dm},$$

et elle n'est pas constante.

Si l'on cherche la condition pour que le point A n'éprouve aucune pression, on doit poser :

$$X_2 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Z_2 = 0,$$

et il vient :

$$\frac{d\omega}{dt} \int xz\,dm - \omega^2 \int yz\,dm = 0,$$

$$\frac{d\omega}{dt} \int yz\,dm + \omega^2 \int xz\,dm = 0.$$

De ces équations on tire, en éliminant $\frac{d\omega}{dt}$,

$$\left(\int xzdm\right)^2 + \left(\int yzdm\right)^2 = 0,$$

d'où :

$$\int xzdm = 0, \quad \int yzdm = 0.$$

On conclut de là que l'axe de rotation doit être un axe principal pour le point O.

Les équations qui déterminent les composantes X_1, Y_1, Z_1 de la pression exercée sur le point O sont :

$$X_1 + \frac{d\omega}{dt} My_1 + \omega^2 Mx_1 = 0,$$

$$Y_1 - \frac{d\omega}{dt} Mx_1 + \omega^2 My_1 = 0,$$

$$Z_1 = 0.$$

Puisque $Z_1 = 0$, on en conclut que la pression au point O est perpendiculaire à l'axe.

Si, à un instant quelconque du mouvement, cet axe cesse d'être fixe et que le corps soit seulement retenu par le point O, il continuera à tourner autour de cet axe comme s'il était fixe. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si un corps retenu par un point fixe commence à tourner autour d'un axe principal de ce point, sous l'action d'un couple perpendiculaire à cet axe principal, le corps continuera à tourner autour de cet axe comme s'il était fixe.*

Remarque. — Si l'axe est principal du centre de gravité, on a, en outre, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, et la pression au point O est aussi nulle, puisque l'on a alors $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$. Les deux points O et A ne supportent donc aucune pression, et l'on a le théorème suivant :

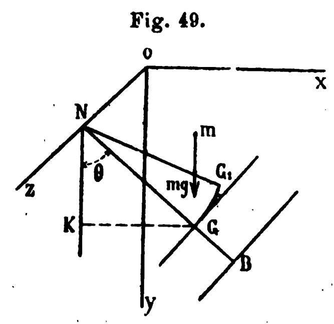
Théorème. — *Si un corps entièrement libre commence à tourner autour d'un des axes principaux de son centre de gravité, et qu'il soit sollicité constamment par un couple situé dans un plan perpendiculaire à cet axe, le mouvement se continuera sans altération, lors même que cet axe serait entièrement libre.*

Pendule composé.

243. Le *pendule composé* est un corps solide pesant, mobile autour d'un axe horizontal que l'on appelle *axe de suspension*.

Prenons l'axe fixe horizontal pour axe des z, l'axe des y dirigé dans le sens de la pesanteur, l'axe des x perpendiculaire au plan des deux premiers (fig. 49).

Fig. 49.



En désignant par X, Y, Z les composantes de la force motrice pour un point m (x, y, z) du corps, l'équation du mouvement est (n° **240**) :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma (Yx - Xy)}{\int r^2 dm}. \qquad (1)$$

Or, dans le cas actuel, on a :

$$X = 0, \quad Y = mg, \quad Z = 0\,;$$

par suite,

$$\Sigma\,(Yx - Xy) = \Sigma mgx = g\Sigma mx = gMx_1,$$

en désignant par x_1 la distance du centre de gravité G au plan des yz.

Du point G menons GN $= a$ perpendiculaire à l'*axe de suspension* Oz, et par le point N menons la verticale NK. Abaissons du point G la perpendiculaire GK sur la verticale NK ; nous aurons évidemment GK $= x_1$. Soit θ l'angle GNK que fait la perpendiculaire GN avec la verticale NK ; θ sera l'angle que fait le plan mené par le centre de gravité et l'axe de suspension avec le plan vertical mené par l'axe de suspension. Soient encore G_1 la position initiale du centre de gravité, et α l'angle G_1NK, valeur initiale de θ.

L'angle θ diminuant quand t augmente, nous aurons :

$$\omega = -\frac{d\theta}{dt},$$

d'où :

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

D'ailleurs, on a :

$$x_1 = GK = a \sin\theta\,;$$

par suite, l'équation (1) nous donne :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mga \sin \theta}{\int r^2 dm} = 0. \qquad (2)$$

Cela posé, par le point G menons une parallèle à Oz, et soit Mk^2 le moment d'inertie du corps par rapport à cette parallèle ; nous aurons (n° **141**) :

$$\int r^2 dm = I_g + Ma^2 = M(k^2 + a^2),$$

et l'équation (2) devient alors :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{ga}{k^2 + a^2} \sin \theta = 0. \qquad (3)$$

Cette équation (3) détermine l'angle θ ou le *mouvement angulaire du centre de gravité* en fonction du temps.

On en tire, en intégrant,

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \Omega^2 + \frac{2ga}{k^2 + a^2}(\cos \theta - \cos \alpha),$$

en désignant par Ω la vitesse angulaire initiale.

244. Mais, au lieu d'intégrer l'équation (3), on peut comparer le mouvement du corps pesant à celui d'un *pendule simple*, c'est-à-dire *d'un point matériel pesant situé sur la droite* NG *à une distance l du point* N. L'équation du mouvement de ce point est, comme on sait (n° **95**) :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \qquad (4)$$

En comparant les équations (3) et (4), on voit que les deux pendules auront un mouvement identique, si, les circonstances initiales étant les mêmes, c'est-à-dire si, les valeurs initiales de θ et $\frac{d\theta}{dt}$ étant les mêmes, on a :

$$l = \frac{k^2 + a^2}{a} = a + \frac{k^2}{a}.$$

Donc, *le mouvement du pendule composé est identique au mouvement du pendule simple de longueur :*

$$l = \frac{k^2}{a} + a;$$

pourvu que les circonstances initiales soient les mêmes pour ces deux corps. On dit alors que le pendule composé et le pendule simple sont *synchrones.*

Ainsi, quand un corps pesant tourne autour d'un axe fixe et horizontal, on peut toujours trouver la longueur d'un pendule simple dont le mouvement soit le même que celui du corps, quelle que soit l'amplitude des oscillations.

Si les oscillations du pendule simple sont très petites, on a pour la durée d'une oscillation (n° **97**) :

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Cette formule sera applicable au pendule composé, si l'on prend :

$$l = a + \frac{k^2}{a}.$$

Cela posé, prenons un point B sur la droite NG prolongée, tel que NB $= l$, et menons par ce point B une parallèle à l'axe de suspension Oz : tous les points

du corps situés sur cette parallèle seront à une distance égale à l de l'axe de suspension. Donc, le mouvement du corps, sous l'action de la pesanteur, communiquera à chacun de ces points le même mouvement que si ce point était *isolé* et suspendu à l'extrémité d'un fil NB sans masse attaché au point N, c'est-à-dire s'il formait un pendule simple. Les points du corps situés au delà de B par rapport à l'axe Oz, *étant isolés de la même manière*, auront un mouvement plus lent, et la liaison avec les autres points augmente leur vitesse. Le contraire aurait lieu pour les points plus rapprochés de Oz que le point B. Les points projetés en B auraient de part et d'autre le même mouvement. Cette droite menée par le point B, parallèle à Oz, s'appelle *axe d'oscillation.*

Si l'axe Oz est principal pour un de ses points, l'axe d'oscillation passera par le *centre de percussion* correspondant (nº **239**). En effet, sa distance à l'axe Oz est donnée par l'expression :

$$a + \frac{I_g}{Ma}.$$

245. THÉORÈME. — *L'axe de suspension et l'axe d'oscillation sont réciproques.* En d'autres termes, si l'on fait osciller le corps autour de l'axe mené par le point B, l'axe d'oscillation correspondant sera Oz.

En effet, soit l' la longueur du pendule simple synchrone ; cette longueur sera donnée par la formule :

$$l' = a' + \frac{k^2}{a'},$$

a' étant la longueur $BG = \frac{k^2}{a}$.

Remplaçant a' par sa valeur, il vient :

$$l' = \frac{k^2}{a} + a = l,$$

et le théorème est démontré.

246. Propriété. — *Il y a une infinité d'axes autour desquels les petites oscillations sont de même durée.*

En effet, on a (n° **244**) la formule :

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

dans laquelle $l = a + \frac{k^2}{a}$. Or, la valeur de l, et, par conséquent, celle de T seront les mêmes pour tous les axes de suspension parallèles entre eux, et situés à égale distance du centre de gravité, puisque pour tous ces axes k et a seront les mêmes. Si du point G comme centre on décrit (fig. 50) deux cercles de rayons a et $\frac{k^2}{a}$, toute droite qui se projettera sur la circonférence de l'un de ces cercles satisfera à la condition. En effet, si O est l'axe de suspension, B sera l'axe d'oscillation, et si B est l'axe de suspension, O sera l'axe d'oscillation.

Fig. 50.

Mais on peut aussi changer la direction de ces axes et leur distance au centre de gravité sans que la valeur de l soit changée.

En effet, désignons par L la distance d'un axe D quelconque au centre de gravité, par α, β, γ les angles que cet axe fait avec les axes principaux du centre

de gravité, par A, B, C les moments d'inertie principaux du corps par rapport à ces axes. Le moment d'inertie par rapport à une droite GH, menée parallèlement à D par le centre de gravité, est donné par la formule :

$$Mk^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma,$$

et la longueur du pendule simple sera :

$$l = L + \frac{k^2}{L} = L + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}{ML}.$$

Or, cette longueur peut rester constante pour une infinité de droites différentes D, puisque l'on peut faire varier α, β, γ, L de manière que l reste constante. Il y a donc une infinité d'axes autour desquels la durée des petites oscillations reste la même.

247. Proposons-nous encore de *trouver l'axe autour duquel la durée d'une oscillation est la plus courte.*

Nous aurons évidemment à déterminer le minimum de l'expression :

$$l = L + \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma}{ML}.$$

Or, si l'on suppose $A < B < C$, on sait (n° **152**) que la plus petite valeur de l'expression

$$A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$

est A, et qu'elle correspond à $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.
Donc, *l'axe de suspension pour lequel l'oscillation sera la plus courte, est parallèle à l'axe du plus petit moment d'inertie relatif au centre de gravité.*

Nous aurons alors :

$$l = L + \frac{A}{ML}.$$

Pour déterminer le minimum de l, nous égalerons à zéro la dérivée $\frac{dl}{dL}$, et nous aurons :

$$L = \sqrt{\frac{A}{M}}, \quad \text{d'où} \quad l = 2\sqrt{\frac{A}{M}}.$$

Donc, l'axe de suspension pour lequel l'oscillation est la plus courte est à une distance égale à $\sqrt{\frac{A}{M}}$ de l'axe du plus petit moment relatif au centre de gravité.

CHAPITRE VII.

Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

248. Problème. — *Un corps solide fixé par un de ses points* O *est sollicité par des forces données. On donne les positions et les vitesses initiales des différents points de ce corps, et l'on demande de déterminer le mouvement du solide.*

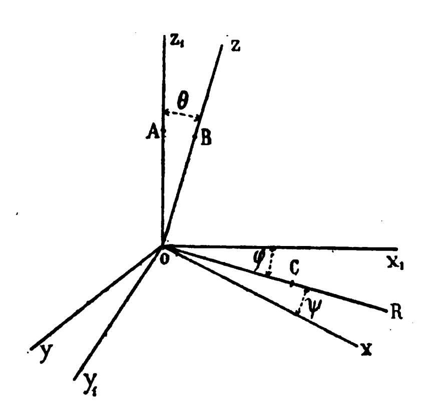
Nous aurons évidemment à considérer deux problèmes distincts :

Problème I. — Le corps étant en repos et sollicité par des *forces d'impulsion*, trouver le mouvement initial.

Problème II. — Le corps étant sollicité par des *forces continues*, trouver son mouvement à un instant donné.

249. Imaginons par le point O trois axes rectangulaires fixes dans l'espace, et trois axes rectangulaires fixes dans le corps et mobiles avec lui, ces derniers coïncidant avec les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O. Il est évident que la position du corps sera déterminée à chaque instant, si l'on connaît la position des axes Ox, Oy, Oz fixes dans le corps par rapport aux axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 fixes dans l'espace (fig. 51).

Fig. 51.



Or, la position de ces axes mobiles est déterminée au moyen des trois angles φ, ψ, θ. L'angle φ est l'angle que fait avec l'axe Ox, la trace OR du plan xOy sur le plan x_1Oy_1 ; cet angle est situé dans le plan x_1Oy_1 ; il est compté dans le sens des rotations positives autour de Oz_1, et il varie de 0 à 2π. L'angle θ est l'angle que fait le plan xOy avec le plan x_1Oy_1 : c'est l'angle que l'axe Oz fait avec l'axe Oz_1 ; il est compté dans le sens des rotations positives autour de OR, et il varie de 0 à π. Enfin, l'angle ψ est l'angle que Ox fait avec OR ; il est situé dans le plan xOy ; il est compté dans le sens des rotations positives autour de Oz, et il varie de 0 à 2π. Nous devons donc déterminer ces angles φ, ψ, θ en fonction de t.

On peut passer de la position Ox, Oy, Oz à une position infiniment voisine au moyen de trois rotations élémentaires : l'une autour de Oz_1, égale à $d\varphi$; l'autre autour de Oz, égale à $d\psi$; et la troisième autour de OR, égale à $d\theta$. Les vitesses angulaires de ces trois rotations sont respectivement égales à $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$.

Mais, d'après ce que nous vu (I. n° **110**), tout mouvement élémentaire d'un corps solide autour d'un point O est une rotation autour d'un axe instantané OI passant par ce point O. Or, on peut décomposer à un instant quelconque la vitesse angulaire ω de cette rotation en trois composantes p, q, r suivant les trois axes Ox, Oy, Oz, ou bien en trois composantes suivant les droites Oz_1, Oz, et OR. Le mouvement élémentaire du corps solide sera donc produit ou par les trois rotations élémentaires pdt, qdt, rdt autour des axes Ox, Oy et Oz, ou par les trois rotations $d\varphi$, $d\psi$, $d\theta$ autour de Oz_1, Oz et OR. Ainsi donc, si sur ces dernières droites on prend des longueurs :

$$OA = \frac{d\varphi}{dt}, \quad OB = \frac{d\psi}{dt}, \quad OC = \frac{d\theta}{dt},$$

la résultante de ces trois longueurs sera la vitesse angulaire ω de la rotation élémentaire du corps solide ; d'autre part, cette vitesse angulaire est aussi la résultante des trois vitesses angulaires p, q, r, et ces dernières sont *les projections de* ω *sur les trois axes* Ox, Oy, Oz.

Il résulte de là que la projection p de ω sur l'axe Ox est égale à la somme des projections de OA, OB, OC sur l'axe Ox ; il en sera de même pour les deux autres axes.

Nous aurons d'après cela :

$$p = \frac{d\varphi}{dt}\cos(z_1Ox) + \frac{d\psi}{dt}\cos(zOx) + \frac{d\theta}{dt}\cos(ROx),$$

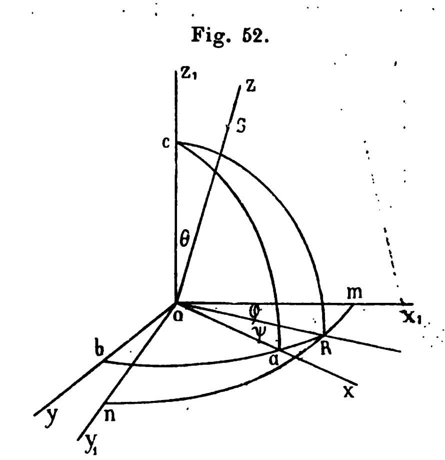
$$q = \frac{d\varphi}{dt}\cos(z_1Oy) + \frac{d\psi}{dt}\cos(zOy) + \frac{d\theta}{dt}\cos(ROy),$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt}\cos(z_1Oz) + \frac{d\psi}{dt}\cos(zOz) + \frac{d\theta}{dt}\cos(ROz).$$

Or, on a :

$$\cos(zOx) = 0, \quad \cos(zOy) = 0, \quad \cos(zOz) = 1, \quad \cos(ROz) = 0.$$

Fig. 52.



D'autre part, si nous imaginons une sphère d'un rayon égal à l'unité et ayant pour centre le point O (fig. 52), elle rencontrera les axes et la droite OR aux points m, n, s, a, b, c et R, et l'on trouve facilement les formules suivantes :

$$\cos(z_1Ox) = \sin\psi\sin\theta, \quad \cos(z_1Oy) = \cos\psi\sin\theta,$$

$$\cos(z_1Oz) = \cos\theta, \quad \cos(ROx) = \cos\psi, \quad \cos(ROy) = -\sin\psi;$$

par conséquent, on a :

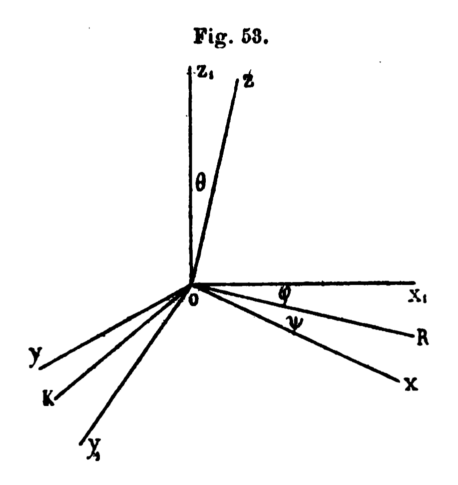
$$p = \frac{d\varphi}{dt}\sin\psi\sin\theta + \frac{d\theta}{dt}\cos\psi,$$

$$q = \frac{d\varphi}{dt}\cos\psi\sin\theta - \frac{d\theta}{dt}\sin\psi,$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta + \frac{d\psi}{dt}.$$

250. Remarque. — On obtiendra plus simplement ces formules en appliquant ce théorème que, pour projeter une longueur sur une direction, on la projette sur trois axes rectangulaires, et l'on fait la somme de ces projections projetées sur la direction. Nous

Fig. 53.



devrons donc, au lieu des trois droites Oz, Oz_1 et OR, prendre trois droites rectangulaires. Or, OR et Oz sont perpendiculaires, et Oz_1 est dans un plan perpendiculaire à OR. Menons par le point O (fig. 53) une droite OK dans le plan xOy, perpendiculairement à OR, et décomposons $\frac{d\varphi}{dt}$ dirigée suivant Oz_1 en deux composantes dirigées suivant Oz et OK et qui seront respectivement égales à $\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta$ et $\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta$.

Il en résultera que les projections de ω sur les trois axes rectangulaires Oz, OR et OK sont respectivement égales à :

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta, \quad \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta.$$

En appliquant le théorème des projections que nous venons de rappeler, il vient :

$$p = \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \sin\psi + \frac{d\theta}{dt} \cos\psi,$$

$$q = \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \cos\psi - \frac{d\theta}{dt} \sin\psi, \qquad (1)$$

$$r = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta.$$

Ce sont les formules que nous avons trouvées tantôt.

251. Il est évident que, si nous parvenons à déterminer p, q, r en fonction de t, nous pourrons au moyen de ces trois formules (1) déterminer φ, ψ, θ en fonction de t.

Le problème est donc ramené à la détermination de p, q, r en fonction de t. C'est ce que nous obtiendrons au moyen du principe de d'Alembert.

252. En appliquant ce principe au premier problème, nous devrons écrire qu'il y a équilibre, au moyen des liaisons, c'est-à-dire du point fixe, entre les forces d'impulsion et les quantités de mouvement initiales et finales, ces dernières étant prises en sens contraires (n° **172**). Or, le corps partant du repos, les quantités de mouvement initiales sont nulles, et, par conséquent, il nous suffira d'écrire qu'il y a équilibre, au moyen des liaisons, entre les forces d'impulsion et les quantités de mouvement finales prises en sens contraires.

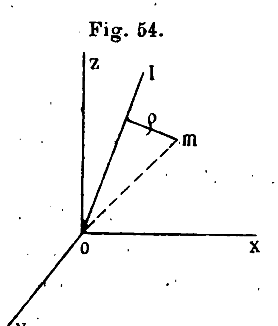
En appliquant le principe de d'Alembert au second problème, nous devrons écrire qu'il y a équilibre, au moyen des liaisons, entre les forces motrices et les forces d'inertie (n° **157**).

Or, en transportant les forces à l'origine O, elles se composeront en une force unique et un couple unique ; la force unique étant détruite par le point fixe, il nous suffira d'écrire, dans le premier cas, qu'il y a équilibre entre le couple des forces de percussion et le couple des quantités de mouvement, prises en sens contraires ; et, dans le second cas, qu'il y a équilibre entre le couple des forces motrices et le couple des forces d'inertie.

Nous devrons donc chercher à déterminer, d'une part, le couple des quantités de mouvement, et, d'autre part, le couple des forces d'inertie, par rapport à trois axes fixes dans le corps et mobiles avec lui, ces axes étant d'abord quelconques.

253. Soient OI l'axe instantané (fig. 54), ω la vitesse angulaire de la rotation, p, q, r ses composantes suivant les axes mobiles Ox, Oy, Oz ; m un point du corps, x, y, z ses coordonnées, et ρ sa distance à l'axe OI. La vitesse de ce point m est $v = \omega\rho$; ses composantes suivant les axes sont données par les formules (I, nº **156**) :

Fig. 54.



$$\frac{dx}{dt} = qz - ry,$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - pz,$$

$$\frac{dz}{dt} = py - qx.$$

De ces équations on tire :

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0.$$

$$p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} + r \frac{dz}{dt} = 0.$$

On en ronclut que *la vitesse v est perpendiculaire au rayon vecteur Om, et à l'axe instantané de rotation ; elle est donc perpendiculaire au plan* mOI.

254. D'autre part, si l'on désigne par 2T la *force vive totale* du corps, on a :

$$2T = \int \frac{ds^2}{dt^2} dm = \int \left\{ \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right\} dm,$$

ou bien :

$$2T = \int \left\{ (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2 \right\} dm$$

$$= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Epr - 2Fpq.$$

On a d'ailleurs aussi :

$$2T = \int \frac{ds^2}{dt^2} dm = \int \omega^2 \rho^2 dm = \omega^2 \int \rho^2 dm = \omega^2 I,$$

I étant le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe OI.

255. Cherchons maintenant les *couples composants du couple des quantités de mouvement*. En désignant ces couples par L_1, M_1, N_1, nous aurons :

$$L_1 = \int \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) dm,$$

$$M_1 = \int \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) dm,$$

$$N_1 = \int \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dm.$$

En remplaçant $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par leurs valeurs, il vient :

$$L_1 = \int \left\{ y\,(py - qx) - z\,(rx - pz) \right\} dm,$$

ou bien :

$$L_1 = Ap - Fq - Er\,;$$

on trouve de la même manière :

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= Bq - Dr - Fp, \\ N_1 &= Cr - Ep - Dq. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ce sont les expressions des trois couples composants du couple des quantités de mouvement par rapport aux axes mobiles avec le corps.

Connaissant ces trois couples, nous aurons immédiatement les équations du mouvement initial du corps sous l'action des forces d'impulsion. En effet, en

désignant par L, M, N les sommes des moments des forces d'impulsion par rapport aux axes mobiles, nous aurons (n° **252**) :

$$\begin{aligned} L &= Ap - Fq - Er, \\ M &= Bq - Dr - Fp, \qquad (3) \\ N &= Cr - Ep - Dq. \end{aligned}$$

Telles sont *les équations du mouvement initial d'un corps solide au repos, retenu par un point fixe, et sollicité par des forces d'impulsion.*

256. Remarque. — Si l'on suppose que les axes mobiles par rapport auxquels on prend les sommes des moments des forces d'impulsion, et les sommes des moments des quantités de mouvement, sont les axes principaux du corps, on a (n° **144**) :

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0;$$

par suite, les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} L &= Ap, \\ M &= Bq, \qquad (4) \\ N &= Cr. \end{aligned}$$

De ces équations on tire :

$$p = \frac{L}{A}, \quad q = \frac{M}{B}, \quad r = \frac{N}{C};$$

la vitesse angulaire ω de la rotation initiale est donnée par la formule :

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

et cette rotation s'effectue autour d'un axe dont la direction fait avec les axes coordonnés des angles α, β, γ donnés par les formules :

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

257. PROPRIÉTÉ. — Il est facile de voir que les seconds membres des équations (3) ne sont autres que les dérivées partielles de la fonction T (n° **254**), prises respectivement par rapport à p, q, r. On a donc pour les équations du mouvement :

$$L = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad M = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad N = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Ces équations expriment la propriété suivante :

Les trois couples composants du couple d'impulsion sont respectivement égaux aux dérivées partielles de la moitié de la force vive du solide par rapport aux trois composantes p, q, r de la vitesse angulaire.

258. PROPRIÉTÉ. — *La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe* OI *est égale à la composante du couple d'impulsion suivant ce même axe* OI.

En effet, on a pour la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe OI :

$$\int v dm \,.\, \rho = \int \omega \rho^2 dm = \omega I,$$

I étant le moment d'inertie du corps par rapport à OI. D'autre part, on a aussi, en désignant par G le moment du couple d'impulsion :

$$\cos(\omega, G) = \frac{Lp + Mq + Nr}{G\omega};$$

d'où :

$$\omega G \cos(\omega, G) = Lp + Mq + Nr,$$

et, en remplaçant L, M, N par leurs valeurs (3) :

$$\omega G \cos(\omega, G) = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$$
$$- 2Dqr - 2Erp - 2Fpq = \omega^2 I;$$

d'où :

$$G \cos(\omega, G) = \omega I.$$

Par conséquent,

$$G \cos(\omega, G) = \int v dm \,.\, \rho,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

259. THÉORÈME. — *L'axe instantané de la rotation produite par le couple des forces d'impulsion est le diamètre conjugué au plan de ce couple dans l'ellipsoïde central relatif au point fixe.*

En effet, les cosinus directeurs de l'axe instantané avec les axes principaux relatifs au point O sont proportionnels à p, q, r, c'est-à-dire (n° **256**) à $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$. Or, l'équation de l'ellipsoïde central rapporté à ses axes principaux Ox, Oy, Oz est :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

Le plan du couple d'impulsion ayant pour équation :

$$LX + MY + NZ = 0,$$

le diamètre conjugué à ce plan dans l'ellipsoïde fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$. Par conséquent, l'axe instantané est conjugué au plan du couple d'impulsion, et le théorème est démontré.

260. Passons maintenant au cas où *le solide est sollicité par des forces continues*. Nous aurons à chercher (n° **252**) les *sommes des moments des forces d'inertie* par rapport à trois axes fixes dans le corps et mobiles avec lui.

A cet effet, nous chercherons les *sommes des moments des forces effectives* par rapport à ces mêmes axes, que nous supposerons d'abord quelconques. Nous aurons donc à déterminer les expressions :

$$L'_1 = \int \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) dm,$$

$$M'_1 = \int \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) dm, \qquad (5)$$

$$N'_1 = \int \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) dm.$$

Or, on a pour les composantes de l'accélération totale du point m :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) + \left(z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} \right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right) + \left(x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt} \right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) + \left(y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} \right).$$

De ces formules on conclut que la *force effective en un point m* du corps est la résultante de deux forces F et F', ayant respectivement pour composantes :

$$\left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) dm, \quad \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right) dm, \quad \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) dm,$$

et

$$\left(z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} \right) dm, \quad \left(x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt} \right) dm, \quad \left(y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} \right) dm$$

Il est facile de voir que la première force F est normale à la trajectoire de l'élément dm, et à l'axe instantané OI.

En effet, on a identiquement :

$$\left(q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right)dx+\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right)dy+\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)dz=0,$$

$$\left(q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right)p+\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right)q+\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)r=0.$$

Cette composante F est donc une *force centripète.*

L'autre composante F' est une *force tangentielle :* sa direction est précisément celle que prendrait l'élément dm, si le système était sollicité par les trois vitesses angulaires dp, dq, dr autour des axes Ox, Oy, Oz, c'est-à-dire par les vitesses qui, se composant avec les vitesses angulaires p, q, r, déterminent la nouvelle position ($p + dp$, $q + dq$, $r + dr$) de l'axe instantané au bout du temps dt.

Observons ici que, si nous imaginons les deux cônes qui servent à représenter le mouvement (I, n° **110**), on peut dire que c'est aux forces centripètes qu'est dû le contact d'un cône sur l'autre, et aux forces tangentielles qu'est due la succession des axes instantanés de rotation.

261. Si nous reprenons les équations (5), et si nous désignons par L_1, M_1, N_1 les couples composants du couple des quantités de mouvement, lesquels ont pour expressions :

$$L_1=\int\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)dm,$$

$$M_1=\int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)dm,$$

$$N_1=\int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dm,$$

il est évident que l'on a :

$$L'_1 = \frac{dL_1}{dt}, \quad M'_1 = \frac{dM_1}{dt}, \quad N'_1 = \frac{dN_1}{dt}.$$

Or, comme on a :

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= Ap - Fq - Er, \\ M_1 &= Bq - Dr - Fp, \\ N_1 &= Cr - Ep - Dq, \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

on en conclut :

$$L'_1 = A\frac{dp}{dt} - F\frac{dq}{dt} - E\frac{dr}{dt} + p\frac{dA}{dt} - q\frac{dF}{dt} - r\frac{dE}{dt},$$

$$M'_1 = B\frac{dq}{dt} - D\frac{dr}{dt} - F\frac{dp}{dt} + q\frac{dB}{dt} - r\frac{dD}{dt} - p\frac{dF}{dt},$$

$$N'_1 = C\frac{dr}{dt} - E\frac{dp}{dt} - D\frac{dq}{dt} + r\frac{dC}{dt} - p\frac{dE}{dt} - q\frac{dD}{dt}.$$

Ce sont les expressions *des trois couples composants du couple des forces effectives*, rapportés aux trois axes mobiles avec le corps.

Si donc nous désignons par L, M, N les trois couples composants des forces extérieures appliquées au corps solide, ou les sommes des moments de ces forces prises par rapport aux axes mobiles, nous aurons (n° **252**) pour les équations du mouvement du corps :

$$A\frac{dp}{dt} - F\frac{dq}{dt} - E\frac{dr}{dt} + p\frac{dA}{dt} - q\frac{dF}{dt} - r\frac{dE}{dt} = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} - D\frac{dr}{dt} - F\frac{dp}{dt} + q\frac{dB}{dt} - r\frac{dD}{dt} - p\frac{dF}{dt} = M, \qquad (7)$$

$$C\frac{dr}{dt} - E\frac{dp}{dt} - D\frac{dq}{dt} + r\frac{dC}{dt} - p\frac{dE}{dt} - q\frac{dD}{dt} = N.$$

262. Les premiers membres de ces équations peuvent être mis sous une autre forme qui nous conduira à certaines remarques importantes. En effet, des formules :

$$A = \int (y^2 + z^2) dm, \quad B = \int (x^2 + z^2) dm, \quad C = \int (x^2 + y^2) dm,$$

$$D = \int yz dm, \quad E = \int xz dm, \quad F = \int xy dm,$$

on tire :

$$p\frac{dA}{dt} - q\frac{dF}{dt} - r\frac{dE}{dt} = 2p\int\left(y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right)dm$$
$$- q\int\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)dm$$
$$- r\int\left(x\frac{dz}{dt} + z\frac{dx}{dt}\right)dm;$$

mais, des deux équations (n° **253**) :

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} + r\frac{dz}{dt} = 0,$$

on tire :

$$p\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)=x\left(q\frac{dy}{dt}+r\frac{dz}{dt}\right).$$

Par conséquent, en substituant et réduisant, on a :

$$p\frac{dA}{dt}-q\frac{dF}{dt}-r\frac{dE}{dt}=q\int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dm-r\int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)dm$$

$$=qN_1-rM_1.$$

On a donc :

$$\frac{dL_1}{dt}=A\frac{dp}{dt}-F\frac{dq}{dt}-E\frac{dr}{dt}+qN_1-rM_1,$$

$$\frac{dM_1}{dt}=B\frac{dq}{dt}-D\frac{dr}{dt}-F\frac{dp}{dt}+rL_1-pN_1,$$

$$\frac{dN_1}{dt}=C\frac{dr}{dt}-E\frac{dp}{dt}-D\frac{dq}{dt}+pM_1-qL_1,$$

et, en posant :

$$\frac{\partial L_1}{\partial t}=A\frac{dp}{dt}-F\frac{dq}{dt}-E\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial t}=B\frac{dq}{dt}-D\frac{dr}{dt}-F\frac{dp}{dt},\qquad(8)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial t}=C\frac{dr}{dt}-E\frac{dp}{dt}-D\frac{dq}{dt},$$

il vient :

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{\partial L_1}{\partial t} + qN_1 - rM_1,$$
$$\frac{dM_1}{dt} = \frac{\partial M_1}{\partial t} + rL_1 - pN_1, \qquad (9)$$
$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{\partial N_1}{\partial t} + pM_1 - qL_1.$$

Les équations (7) du mouvement peuvent alors être mises sous la forme suivante :

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} + qN_1 - rM_1 = L,$$
$$\frac{\partial M_1}{\partial t} + rL_1 - pN_1 = M, \qquad (10)$$
$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + pM_1 - qL_1 = N.$$

Ces équations déterminent les composantes p, q, r de la vitesse angulaire de la rotation instantanée. Ces composantes connues, on déterminera les angles φ, ψ, θ au moyen des formules (1).

263. Remarque. — Les équations (10) prennent une forme plus simple, si l'on prend pour axes mobiles les axes principaux du corps. On a alors $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$; les équations (6) nous donnent:

$$L_1 = Ap, \quad M_1 = Bq, \quad N_1 = Cr,$$

et les équations (8) deviennent :

$$\frac{\partial L_1}{\partial t} = A\frac{dp}{dt}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial t} = B\frac{dq}{dt}, \quad \frac{\partial N_1}{\partial t} = C\frac{dr}{dt}.$$

Les équations (10) prennent la forme suivante :

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M, \qquad (11)$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = N.$$

Ce sont les *équations d'Euler*. Elles ne renferment pas les réactions du point fixe : c'est ce qui résulte de la manière dont elles ont été établies. D'ailleurs, si l'on introduisait les réactions du point fixe, ces réactions devraient être comprises parmi les forces extérieures, c'est-à-dire dans les seconds membres de (11). Mais, les moments de ces réactions par rapport aux axes fixes dans le corps sont constamment nuls, et par conséquent n'entreront pas dans L, M, N, qui ne contiendront donc que les moments des forces extérieures par rapport aux axes principaux du corps.

Ces équations (11), jointes aux équations (1), nous donnent six équations différentielles du premier ordre pour déterminer les six fonctions p, q, r, φ, ψ, θ en fonction de t. L'intégration de ces équations introduit six constantes arbitraires que l'on détermine par les circonstances initiales du mouvement, c'est-à-dire les positions initiales φ_0, ψ_0, θ_0 et les vitesses angulaires initiales p_0, q_0, r_0.

Lorsque L, M, N sont exprimés en fonction de p, q, r, t seulement, l'intégration des équations (11) donnera p, q, r en fonction de t, avec trois constantes arbitraires ; substituant ces valeurs dans les équations (1), on aura trois équations pour déterminer φ, ψ, θ en fonction de t, avec trois nouvelles constantes arbitraires.

Si L, M, N sont donnés en fonction de φ, ψ, θ, t, ce qui est le cas le plus général, il faudra éliminer p, q, r entre les équations (1) et (11), ce qui nous conduira à trois équations différentielles du second ordre entre les variables φ, ψ, θ et le temps t.

264. Propriété. — Les équations (9) donnent lieu à des remarques importantes.

Si nous observons que L_1, M_1, N_1 sont les coordonnées du pôle du couple des quantités de mouvement[1] par rapport aux axes mobiles, $\frac{dL_1}{dt}$, $\frac{dM_1}{dt}$, $\frac{dN_1}{dt}$, seront les composantes de la *vitesse absolue de ce pôle* parallèlement aux axes mobiles.

Les équations (9) nous apprennent que la *vitesse absolue* du pôle, considéré comme un point mobile, est la *résultante de deux vitesses partielles :* l'une, qui a pour composantes $qN_1 - rM_1$, $rL_1 - pN_1$, $pM_1 - qL_1$, est la vitesse que le pôle aurait s'il était invariablement lié au corps solide (I, n° **156**), c'est-à-dire la *vitesse d'entraînement ;* l'autre, qui a pour composantes $\frac{\partial L_1}{dt}$, $\frac{\partial M_1}{dt}$, $\frac{\partial N_1}{dt}$, est la *vitesse relative du pôle*, telle qu'elle apparaîtrait à un observateur qui participerait au mouvement.

265. On reconnaît facilement que *ces deux vitesses partielles représentent en grandeur et en axe, la première la composante du couple des forces effectives qui se rapporte aux forces centripètes, la seconde la composante de ce couple qui se rapporte aux forces tangentielles.*

---

1. Nous appelons ainsi l'extrémité de l'axe du couple des quantités de mouvement.

En effet, les composantes de la force effective centripète pour un élément dm étant (nº **260**) :

$$\left(q\frac{dz}{dt}-r\frac{dy}{dt}\right)dm,\quad \left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right)dm,\quad \left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)dm,$$

nous aurons pour la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe des x :

$$\int\left\{\left(p\frac{dy}{dt}-q\frac{dx}{dt}\right)y-\left(r\frac{dx}{dt}-p\frac{dz}{dt}\right)z\right\}dm$$

$$=p\int\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)dm-q\int y\frac{dx}{dt}\,dm-r\int z\frac{dx}{dt}\,dm$$

$$=q\int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dm-r\int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)dm$$

$$=q\mathrm{N}_1-r\mathrm{M}_1.$$

D'autre part, les composantes de la force effective tangentielle pour l'élément dm étant (nº **260**) :

$$\left(z\frac{dq}{dt}-y\frac{dr}{dt}\right)dm,\quad \left(x\frac{dr}{dt}-z\frac{dp}{dt}\right)dm,\quad \left(y\frac{dp}{dt}-x\frac{dq}{dt}\right)dm,$$

nous aurons pour la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe des x :

$$\int\left\{\left(y\frac{dp}{dt}-x\frac{dq}{dt}\right)y-\left(x\frac{dr}{dt}-z\frac{dp}{dt}\right)z\right\}dm$$

$$=\frac{dp}{dt}\int(y^2+z^2)\,dm-\frac{dq}{dt}\int xy\,dm-\frac{dr}{dt}\int xz\,dm$$

$$=\mathrm{A}\frac{dp}{dt}-\mathrm{F}\frac{dq}{dt}-\mathrm{E}\frac{dr}{dt}=\frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial t}.$$

La propriété énoncée est donc démontrée.

266. Remarque. — Les équations (10), et les équations (11) qui se rapportent au cas particulier, n'expriment donc rien autre que le théorème connu (n° **186**) que l'axe OG du couple résultant des forces extérieures relatif au point O pris pour origine est égal et paralèlle à la vitesse du point K extrémité de l'axe du couple résultant des quantités du mouvement.

Il est bon d'observer que l'on aurait pu obtenir les équations (10) et (11) en appliquant directement ce théorème.

En effet, soient Ox, Oy, Oz les trois axes principaux du corps relatif au point fixe, L, M, N les couples composants du couple des forces extérieures; les couples composants du couple des quantités du mouvement sont Ap, Bq, Cr ; ce sont les coordonnées de l'extrémité K de l'axe de couple. Les composantes de la *vitesse relative* du point K par rapport aux axes Ox, Oy, Oz sont $A\frac{dp}{dt}$, $B\frac{dq}{dt}$, $C\frac{dr}{dt}$. Pour avoir les composantes de la *vitesse absolue* du point K par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, il faut ajouter aux composantes de la vitesse relative les composantes de la *vitesse d'entraînement* du point K, c'est-à-dire les composantes de la vitesse de ce point supposé invariablement lié au corps, composantes qui ont pour expressions (I, n° **156**) :

$$q \cdot Cr - r \cdot Bq, \quad r \cdot Ap - p \cdot Cr, \quad p \cdot Bq - q \cdot Ap,$$

ou bien :

$$(C - B)\, qr, \quad (A - C)\, rp, \quad (B - A)\, pq,$$

et nous aurons facilement les équations (11).

267. Cas particulier. — *Si les forces extérieures sont nulles, ou si elles se réduisent à une force unique passant par le point fixe* O, on a :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0;$$

et les équations du mouvement (11) prennent la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
&A \frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = 0, \\
&B \frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp = 0, \qquad (12) \\
&C \frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = 0.
\end{aligned}
$$

On trouve une première intégrale de ces équations, en les multipliant respectivement par p, q, r et ajoutant; il vient :

$$Apdp + Bqdq + Crdr = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h. \qquad (13)$$

h étant une constante. Or, le premier membre de cette équation (13) n'est autre que la force vive totale du système (n° **254**). Elle exprime donc que *la force vive du système est constante.*

C'est d'ailleurs ce qui résulte du théorème général des forces vives (n° **204**), puisque, dans le cas actuel, le travail des forces extérieures est nul.

On obtient une deuxième intégrale des équations (12) en les multipliant respectivement par Ap, Bq, Cr, et ajoutant ; il vient :

$$A^2 p\,dp + B^2 q\,dq + C^2 r\,dr = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2, \qquad (14)$$

k^2 étant une constante. Cette équation exprime que *la somme des moments des quantités de mouvement est constante pendant toute la durée du mouvement.*

C'est d'ailleurs ce qui résulte du théorème général des moments des quantités de mouvement, qui nous apprend que, dans le cas actuel (n° **188**), l'axe résultant des moments des quantités de mouvement reste constant en grandeur et en direction. Cet axe ayant pour composantes Ap, Bq, Cr, ses cosinus directeurs sont $\frac{Ap}{k}, \frac{Bq}{k}, \frac{Cr}{k}$. Or, le plan du maximum des aires étant perpendiculaire à cet axe, il s'ensuit qu'il fait avec les plans coordonnés des angles dont les cosinus sont $\frac{Ap}{k}, \frac{Bq}{k}, \frac{Cr}{k}$ (n° **194**).

Les intégrales (13) et (14) étant connues, on en tire :

$$\left.\begin{aligned} p^2 &= \frac{k^2 - Bh + (B - C)\,Cr^2}{A\,(A - B)}, \\ q^2 &= \frac{k^2 - Ah + (A - C)\,Cr^2}{B\,(B - A)}; \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

substituant ces valeurs dans la troisième équation (12) il vient :

$$dt = \frac{\pm C\sqrt{AB}dr}{\sqrt{\{k^2 - Bh + (B - C)Cr^2\}\{Ah - k^2 + (C - A)Cr^2\}}}. \quad (16)$$

Comme le temps t croît constamment, dt est toujours positif, et l'on prendra le signe + ou le signe — suivant que dr sera positif ou négatif.

L'équation (16), étant intégrée, nous donnera t en fonction de r, et la constante sera déterminée par la valeur initiale de r. On en déduira r en fonction de t, et, par conséquent, p et q au moyen des formules (15). Mais l'équation (16) ne peut être intégrée dans le cas général ; l'intégrale du second membre dépend des fonctions elliptiques.

Elle est intégrable dans le cas où deux des trois moments d'inertie principaux A, B, C sont égaux, ou encore si l'une des quantités telles que $k^2 - Bh$ est nulle, parce qu'alors il ne reste plus qu'un radical du second degré.

268. Il est facile de voir que, si l'on suppose $A < B < C$, les expressions $k^2 - Ah$ et $k^2 - Ch$ sont toujours de signes contraires, et que la quantité $k^2 - Bh$ peut seule devenir nulle.

En effet, des équations (13) et (14) on tire facilement :

$$k^2 - Ah = B(B - A)q^2 + C(C - A)r^2,$$

$$k^2 - Bh = A(A - B)p^2 + C(C - B)r^2,$$

$$k^2 - Ch = A(A - C)p^2 + B(B - C)q^2,$$

et, il est évident que $k^2 - Ah > 0$, $k^2 - Ch < 0$; tandis que l'expression $k^2 - Bh$ peut être positive, négative ou nulle. Ainsi donc, de ces trois quantités une seule peut être nulle : c'est celle qui correspond à l'axe moyen de l'ellipsoïde d'inertie ; les deux autres sont toujours de signes contraires.

269. Remarque. — On peut calculer la vitesse angulaire ω en fonction de t, de la manière suivante qui a l'avantage de donner des formules symétriques.

De l'équation :

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2, \qquad (17)$$

on tire :

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} + r \frac{dr}{dt},$$

et, en remplaçant $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations (12), il vient :

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = pqr \cdot \frac{(A - B)(A - C)(B - C)}{ABC}.$$

D'ailleurs, les équations (13), (14) et (17) nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{k^2 - (B + C)h + BC\omega^2}{(A - B)(A - C)}}, \\ q &= \sqrt{\frac{k^2 - (C + A)h + AC\omega^2}{(B - A)(B - C)}}, \\ r &= \sqrt{\frac{k^2 - (A + B)h + BA\omega^2}{(C - A)(C - B)}}, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

et, par suite,

$$dt = \frac{ABC\omega d\omega}{\sqrt{\{(B+C)h-k^2-BC\omega^2\}\{(A+C)h-k^2-AC\omega^2\}\{(A+B)h-k^2-AB\omega^2\}}};$$

Cette équation, étant intégrée, nous donnera ω en fonction de t, et alors les équations (18) déterminent p, q, r en fonction de t, et le problème sera résolu.

Méthode de Poinsot.

270. La solution analytique du problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe est très compliquée. Comme nous venons de le voir, même dans le cas particulier où il n'existe pas de force motrice, le problème nous conduit à une intégrale elliptique. On ne peut donc pas déterminer le mouvement d'une manière complète. Mais, on peut démontrer, par la méthode de Poinsot, les propriétés géométriques du mouvement.

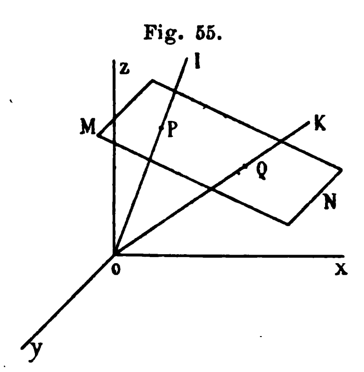
271. Théorème. — *A chaque instant, l'axe instantané de rotation est le diamètre conjugué au plan du couple résultant des quantités de mouvement dans l'ellipsoïde central.*

Soient Ox, Oy, Oz les axes principaux du point O à un instant quelconque. L'équation de l'ellipsoïde central est :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

Le mouvement du corps à cet instant est une rotation instantanée autour de l'axe OI (fig. 55). Soient P le point où cet axe instantané rencontre la surface de l'ellipsoïde central, point que nous appellerons le *pôle instantané*, x', y', z' les coordonnées de ce point, et MN le plan tangent en ce point à l'ellipsoïde central.

Fig. 55.



L'équation du plan tangent étant :

$$AXx' + BYy' + CZz' = 1,$$

nous allons démontrer que *ce plan est parallèle au plan invariable du couple résultant des quantités de mouvement*, ou au *plan du maximum des aires*, lequel a pour équation :

$$L_1X + M_1Y + N_1Z = 0,$$

ou bien :

$$ApX + BqY + CrZ = 0.$$

En effet, le point x', y', z' étant sur l'axe instantané OI, à une distance $OP = \rho$ de l'origine, nous aurons pour les cosinus directeurs de l'axe OI :

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\rho}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{\rho}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{\rho};$$

mais, on a aussi :

$$\cos\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\omega}.$$

On en conclut que p, q, r sont proportionnels à x', y', z' ; donc Ap, Bq, Cr sont proportionnels à Ax', By', Cz'. Il résulte de là que les deux plans sont parallèles, et, par suite, l'axe OI est conjugué au plan du couple résultant des quantités de mouvement.

Par conséquent, si l'on mène à l'ellipsoïde central relatif au point O un plan tangent perpendiculaire à l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, le point de contact P de ce plan sera le pôle instantané de la rotation.

272. Théorème. — *La vitesse angulaire de la rotation instantanée est proportionnelle au demi diamètre qui va du centre au pôle instantané de rotation.*

En effet, l'équation des forces vives :

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

nous donne :

$$\omega^2 I = h,$$

I étant le moment d'inertie du corps relatif à l'axe OI.

Or, ρ étant le demi diamètre OP, on a (n° **143**) :

$$I = \frac{1}{\rho^2},$$

par conséquent,

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = h, \quad \text{d'où :} \quad \omega = \rho\sqrt{h},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

273. Théorème. — *Le plan tangent qui passe par le pôle instantané de rotation est à une distance constante du point fixe.*

En effet, si du point fixe O on abaisse une perpendiculaire OQ = δ (fig. 55) sur ce plan, on a :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A^2x'^2 + B^2y'^2 + C^2z'^2}}.$$

Or, en égalant les valeurs de cos α, cos β, cos γ, trouvées ci-dessus (n° **271**), on a :

$$x' = \frac{p\rho}{\omega}, \quad y' = \frac{q\rho}{\omega}, \quad z' = \frac{r\rho}{\omega};$$

par conséquent,

$$\delta = \frac{\omega}{\rho\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \frac{\omega}{k\rho} = \frac{\sqrt{h}}{k} = \textit{const.}$$

Comme d'ailleurs la *direction* de ce plan tangent parallèle au plan du maximum des aires est aussi constante, il s'ensuit que *ce plan tangent sera complètement fixe dans l'espace.*

274. Propriété. — Il est évident que OQ est la projection de la longueur OP sur la direction de l'axe OQK, qui est l'axe des moments des quantités de mouvement. Or, nous venons de démontrer que cette longueur OQ est constante ; par conséquent, la projection de la longueur OP sur l'axe OQK est constante. Il en sera de même de la projection sur OQK de la vitesse angulaire ω, laquelle est proportionnelle à OP. Donc, *la vitesse angulaire de la rotation, estimée suivant l'axe des moments des quantités de mouvement, est constante.*

275. Image du mouvement. — On peut résumer les propositions que nous venons de démontrer dans l'énoncé suivant qui forme le *théorème de Poinsot*[1].

Théorème. — *Si l'on considère les positions successives de l'ellipsoïde central pendant la rotation du corps, on peut se représenter le mouvement du corps en concevant que l'ellipsoïde central dont le centre est maintenu fixe se meuve de manière à rester constamment en contact avec un plan fixe dans l'espace absolu sur lequel l'ellipsoïde roule sans glisser. L'axe instantané de rotation est à chaque instant le diamètre qui passe par le point de contact, et la vitesse angulaire de cette rotation est proportionnelle à ce diamètre.*

Pour déterminer ce plan fixe, on prendra sur l'axe OK, à partir du point fixe O, une longueur $OQ = \frac{\sqrt{h}}{k}$, et l'on mènera par le point Q un plan MN perpendiculaire à OK.

276. Remarque. — Le mouvement relatif de l'ellipsoïde par rapport au plan ne sera pas modifié, si on laisse l'ellipsoïde fixe, et si l'on fait rouler le plan MN sur la surface de cette ellipsoïde de manière que sa distance au point O reste constante.

277. Propriété. — Le point de contact du plan et de l'ellipsoïde, c'est-à-dire le pôle instantané, décrit sur la surface de l'ellipsoïde une courbe que Poinsot a appelée *polhodie*[2]. Ce même point décrit sur le plan fixe une seconde courbe, appelée *herpolhodie*[3], sur laquelle la polhodie vient rouler dans le mouvement relatif. Ces deux courbes sont les bases des deux cônes

1. Poinsot. *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, p. 77.
2. Route du pôle, de πόλος et ὁδός.
3. Route serpentante du pôle, de ἕρπω.

ayant leurs sommets au point O : la polhodie est la base du cône fixe dans le corps et mobile avec lui, l'herpolhodie la base du cône fixe dans l'espace.

278. On peut trouver facilement les équations de la polhodie en la considérant comme *le lieu des points du contact de l'ellipsoïde central avec un plan mobile qui resterait à une distance constante δ du centre.*

Désignons par X, Y, Z les coordonnées d'un point du lieu ; puisque ce point est sur l'ellipsoïde central, nous aurons :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1. \qquad \text{(A)}$$

D'autre part, l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde au point (X, Y, Z) étant :

$$AXx' + BYy' + CZz' = 1,$$ [1]

nous aurons :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2}},$$

ou bien :

$$A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 = \frac{1}{\delta^2} = \frac{k^2}{h}. \qquad \text{(B)}$$

Les équations (A) et (B) sont celles de la polhodie. Elles représentent deux ellipsoïdes ayant les mêmes plans principaux : l'intersection de ces deux surfaces est donc une courbe qui se projette sur les plans coordonnés suivant des courbes du second degré.

1. Dans cette équation x', y', z' sont les coordonnées courantes.

279. Proposons-nous de trouver l'équation du *lieu des axes instantanés dans l'intérieur du corps.*

Les équations de l'axe instantané sont :

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r},$$

p, q, r satisfaisant aux équations de condition :

$$\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= k^2 ; \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

ce sont les équations d'une génératrice du cône. Pour obtenir l'équation du cône, il faut éliminer p, q, r entre les quatre équations précédentes. Or, de ces équations on tire :

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r} = \frac{\sqrt{AX^2 + BY^2 + CZ^2}}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} = \frac{\sqrt{A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}.$$

Les deux derniers rapports nous donnent, en ayant égard aux équations (C) :

$$\frac{AX^2 + BY^2 + CZ^2}{h} = \frac{A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2}{k^2},$$

ou bien :

$$AX^2(k^2 - Ah) + BY^2(k^2 - Bh) + CZ^2(k^2 - Ch) = 0. \qquad \text{(D)}$$

C'est l'équation du lieu. Comme les expressions $k^2 - Ah$ et $k^2 - Ch$ sont de signes contraires (n° **268**), cette équation représente *un cône elliptique du second*

degré ayant pour sommet le centre O. Il est évident, puisque $k^2 - Ah > 0$, $k^2 - Ch < 0$, que l'axe de ce cône sera le grand axe ou le petit axe de l'ellipsoïde central, suivant que $k^2 - Bh$ sera négatif ou positif, c'est-à-dire suivant que l'on aura $\frac{h}{k^2} \gtrless \frac{1}{B}$. Or, comme on a (nº **273**) : $\delta = OQ = \frac{\sqrt{h}}{k}$, il en résulte que le cône aura pour axe le grand axe ou le petit axe de l'ellipsoïde suivant que δ^2 sera plus grand ou plus petit que $\frac{1}{B} = b^2$, c'est-à-dire suivant que la distance δ qui est comprise entre a et c sera plus grande ou plus petite que l'axe moyen de l'ellipsoïde.

On conclut de là que la polhodie peut être considérée comme l'intersection de la surface (D) avec l'ellipsoïde central. C'est donc une courbe fermée à double courbure qui entoure le sommet du grand axe ou celui du petit axe de l'ellipsoïde, suivant que $\delta > b$ ou $< b$.[1]

Il est évident que le cône (D) devient circulaire autour de l'un des axes principaux, si les moments d'inertie relatifs aux deux autres sont égaux. Il se réduit à deux plans, lorsque $k^2 - Bh = 0$.

Observons que cette équation (D) peut être obtenue en combinant les équations (A) et (B).

280. Cherchons encore le *lieu de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement*. Cet axe est, comme nous l'avons vu (nº **267**), immobile dans l'espace: il en résulte qu'il traverse le corps en mouvement suivant une série de droites qui forment un cône.

---

1. Pour la discussion de cette courbe, voir le *Mémoire de* POINSOT.

Les équations de l'axe de ce couple sont :

$$\frac{X}{Ap} = \frac{Y}{Bq} = \frac{Z}{Cr},$$

p, q, r satisfaisant aux équations ci-dessus (C) : ce sont les équations d'une génératrice du cône. Pour obtenir l'équation du cône, nous devons éliminer p, q, r ; or, on a :

$$\frac{X}{Ap} = \frac{Y}{Bq} = \frac{Z}{Cr} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \frac{\sqrt{\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C}}}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}}.$$

Les deux derniers rapports nous donnent, en ayant égard aux équations (C) :

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{k^2} = \frac{\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} + \frac{Z^2}{C}}{h},$$

ou bien :

$$X^2 \frac{Ah - k^2}{A} + Y^2 \frac{Bh - k^2}{B} + Z^2 \frac{Ch - k^2}{C} = 0.$$

C'est l'équation du lieu : elle représente aussi *un cône elliptique du second degré.*

Cas où deux des moments principaux d'inertie sont égaux.

281. Supposons, par exemple, $B = A$; l'ellipsoïde central est de révolution autour de l'axe des z. Les équations du mouvement sont alors :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{C - A}{A} qr = \frac{L}{A},$$

$$\frac{dq}{dt} - \frac{C - A}{A} rp = \frac{M}{A},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{N}{C}.$$

Dans le cas particulier où $N = 0$, on a :

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{d'où} \quad r = const. = n\,;$$

n sera évidemment la composante de la vitesse angulaire initiale suivant l'axe Oz.

Si nous posons :

$$\frac{C - A}{A} n = \gamma, \quad \frac{L}{A} = \lambda, \quad \frac{M}{A} = \mu,$$

λ et μ étant des quantités qui peuvent être variables, les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{dp}{dt} + \gamma q = \lambda,$$

$$\frac{dq}{dt} - \gamma p = \mu.$$

Lorsque λ et μ sont des fonctions de t seulement, ces deux équations sont faciles à intégrer. A cet effet, nous intégrerons d'abord les équations privées de seconds membres :

$$\frac{dp}{dt} + \gamma q = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} - \gamma p = 0.$$

De la seconde on tire :

$$p = \frac{1}{\gamma}\frac{dq}{dt},$$

et, en substituant dans la première, on a :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \gamma^2 q = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est :

$$q = \mathrm{P} \sin \gamma t + \mathrm{Q} \cos \gamma t,$$

P et Q étant des constantes arbitraires.

On en déduit :

$$p = P \cos \gamma t - Q \sin \gamma t.$$

Pour intégrer les équations avec seconds membres, il suffit de considérer P et Q comme des variables, et l'on aura pour déterminer les fonctions P et Q les deux équations :

$$\frac{dP}{dt} = \lambda \cos \gamma t + \mu \sin \gamma t,$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \sin \gamma t + \mu \cos \gamma t;$$

par conséquent, si λ et μ sont des fonctions de t, les fonctions P et Q seront données par des quadratures.

282. Proposons-nous maintenant d'étudier le cas particulier où l'on a :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

On a alors, comme dans le cas précédent,

$$r = const. = n,$$

et, en posant, comme ci-dessus :

$$\frac{C - A}{A} n = \gamma,$$

les équations du mouvement sont :

$$\frac{dp}{dt} + \gamma q = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} - \gamma p = 0.$$

On en tire l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \gamma^2 p = 0,$$

dont l'intégrale générale peut être mise sous la forme :

$$p = \alpha \sin(\gamma t + \beta),$$

α et β étant des constantes arbitraires que l'on détermine par les circonstances initiales.

On en déduit :

$$q = -\alpha \cos(\gamma t + \beta).$$

D'ailleurs, les intégrales (13) et (14) (n° **267**) nous donnent, dans le cas actuel,

$$A(p^2 + q^2) + Cn^2 = h,$$

$$A^2(p^2 + q^2) + C^2n^2 = k^2;$$

d'où l'on tire :

$$p^2 + q^2 = const. = m^2,$$

et il est évident que *m sera la projection de la vitesse angulaire sur le plan des xy.*

Or, on a aussi :

$$p^2 + q^2 = \alpha^2,$$

par suite,

$$\alpha = m,$$

et, par conséquent,

$$p = m \sin(\gamma t + \beta),$$

$$q = -m \cos(\gamma t + \beta).$$

Si, dans ces équations, on fait $t = 0$, il vient :

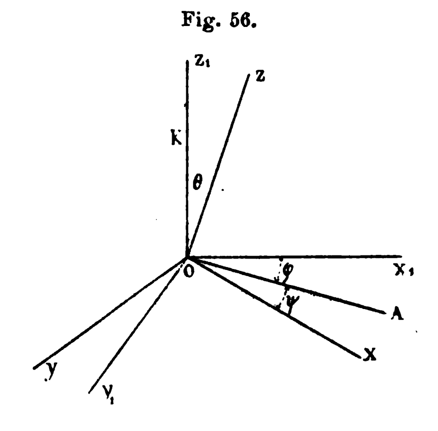
$$p_0 = m \sin \beta,$$

$$q_0 = -m \cos \beta,$$

équations qui serviront à déterminer m et β en fonction de p_0 et q_0.

D'ailleurs, comme l'axe OK du couple résultant des quantités de mouvement est fixe (n° **267**), nous pouvons le prendre pour l'axe OZ_1 (fig. 56) ; d'autre part, les

Fig. 56.



projections de OK sur les axes Ox, Oy, Oz étant respectivement égales à Ap, Aq, Cn, on a :

$$\cos \theta = \frac{Cn}{k} = \frac{Cn}{\sqrt{A^2m^2 + C^2n^2}} = const.$$

L'angle θ est donc constant, et, par conséquent, *l'axe de révolution de l'ellipsoïde central fait un angle constant avec l'axe* OK *du couple résultant des quantités de mouvement*; en d'autres termes, *cet axe de révolution décrit un cône circulaire droit autour de* OK.

283. La vitesse angulaire de la rotation est donnée par la formule :

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{m^2 + n^2} = const.$$

Donc, *le mouvement de rotation est uniforme.*

284. De ce que $\theta = const.$, il résulte que $\frac{d\theta}{dt} = 0$, et alors les formules (n° **250**) qui relient p, q, r aux angles φ, ψ, θ se réduisent aux suivantes :

$$p = \sin\theta \sin\psi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$q = \sin\theta \cos\psi \frac{d\varphi}{dt},$$

$$r = \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta \frac{d\varphi}{dt}.$$

Des deux premières on tire :

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{p}{q} = -\operatorname{tg}(\gamma t + \beta),$$

d'où :

$$\psi = i\pi - (\gamma t + \beta),$$

i étant un nombre entier quelconque.

La troisième nous donne :

$$\cos\theta \frac{d\varphi}{dt} = n - \frac{d\psi}{dt} = n + \gamma = n + \frac{C - A}{A} n = \frac{Cn}{A},$$

d'où :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cn}{A \cos\theta} = \frac{k}{A},$$

et, en intégrant,

$$\varphi = \frac{k}{A} t + \varphi_0.$$

Donc, *l'intersection* OA *du plan xy* (c'est-à-dire *du plan de l'équateur de l'ellipsoïde) avec le plan* x_1y_1 *du couple résultant des quantités de mouvement se meut d'un mouvement uniforme sur ce dernier plan*, c'est-à-dire *autour de l'axe* OK.

285. Propriété. — *L'angle que fait l'axe instantané* OI *avec* O*z* *est constant* ; en effet, on a :

$$\cos(I, Z) = \frac{r}{\omega} = \frac{n}{\omega} = const.$$

Par conséquent, *le lieu de l'axe instantané dans le corps est un cône circulaire ayant pour axe* OZ, c'est-à-dire *l'axe de révolution de l'ellipsoïde.* Il s'ensuit que la *polhodie* qui est l'intersection de l'ellipsoïde par ce cône sera *un cercle.*

Il est facile de s'assurer que *l'herpolhodie est aussi un cercle.* En effet, cette courbe est l'intersection du cône décrit par l'axe instantané dans l'espace avec

le plan fixe. Or, l'angle que fait l'axe instantané OI avec OK est constant ; en effet, on a :

$$\cos(\mathrm{I}, \mathrm{K}) = \frac{\mathrm{A}p}{k} \cdot \frac{p}{\omega} + \frac{\mathrm{A}q}{k} \cdot \frac{q}{\omega} + \frac{\mathrm{C}n}{k} \cdot \frac{n}{\omega} = \frac{\mathrm{A}(p^2+q^2)+\mathrm{C}n^2}{k\omega}$$

$$= \frac{h}{k\omega} = const.$$

Donc, *l'axe instantané* OI *décrit dans l'espace un cône circulaire droit autour de* OK, et, par conséquent, son intersection avec le plan fixe perpendiculaire à OK sera un cercle.

Il résulte de là que *le mouvement du corps peut être produit par le roulement d'un cône circulaire sur un cône circulaire.*

286. PROPRIÉTÉ. — *L'axe fixe du couple résultant des quantités de mouvement, l'axe instantané de rotation et l'axe de révolution de l'ellipsoïde central sont toujours dans un même plan.*

Cas où l'on a $k^2 - \mathrm{B}h = 0$.

287. Reprenons les équations (13) et (14) (n° **267**), et multiplions la première par B ; nous aurons, en ayant égard à la relation $\mathrm{B}h = k^2$, les deux équations :

$$\mathrm{AB}p^2 + \mathrm{BC}r^2 = k^2 - \mathrm{B}^2q^2,$$

$$\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{C}^2r^2 = k^2 - \mathrm{B}^2q^2 ;$$

on en tire :

$$p = \pm \sqrt{\frac{C - B}{AB(C - A)}} \sqrt{k^2 - B^2q^2},$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{B - A}{BC(C - A)}} \sqrt{k^2 - B^2q^2}.$$

De ces valeurs on conclut que l'on doit avoir $k^2 - B^2q^2 > 0$, ou bien $q^2 < \frac{k^2}{B^2}$. Lorsque $q^2 = \frac{k^2}{B^2}$, p et r sont nuls, et ils le seront, par conséquent, pendant toute la durée du mouvement, puisque l'axe Oy est alors un axe permanent de rotation (n° **241**).

Donc, p et r conservent constamment les mêmes signes, et par conséquent, ceux de leurs valeurs initiales p_0 et r_0. Substituant les valeurs de p et r dans la deuxième équation d'Euler, il vient :

$$dt = \pm B^2 \sqrt{\frac{AC}{(C - B)(B - A)}} \frac{dq}{k^2 - B^2q^2}.$$

On prendra le signe + ou le signe —, suivant que p_0 et r_0 sont de mêmes signes ou de signes contraires (puisqu'il en sera de même de p et r) ; suivant l'un ou l'autre de ces cas, dq sera positif, ou négatif.

Si l'on suppose p et r de même signe, on a, en intégrant :

$$t = \frac{B}{2k} \sqrt{\frac{AC}{(C - B)(B - A)}}\, l \,.\, \frac{1 + \frac{B}{k}q}{1 - \frac{B}{k}q} \cdot \frac{1}{P},$$

P étant une constante ; et, en posant :

$$\alpha = \frac{2k}{B} \sqrt{\frac{(C - B)(B - A)}{AC}},$$

il vient :

$$q = \frac{k}{B} \frac{Pe^{\alpha t} - 1}{Pe^{\alpha t} + 1}.$$

Pour $t = \infty$, on a $q = \frac{k}{B}$, et, par suite, $p = 0$, $r = 0$.

Donc, *la direction de l'axe instantané tend vers celle de l'axe du moment d'inertie moyen.*

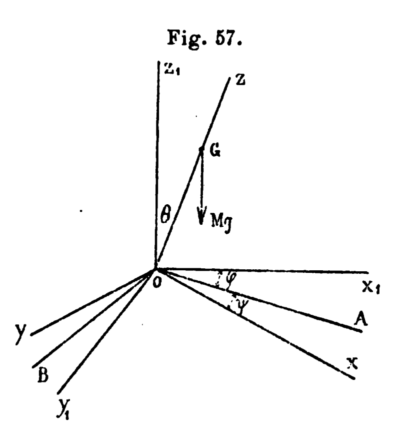
On arriverait au même résultat si l'on supposait p et r de signes contraires.

Mouvement d'un solide de révolution autour d'un point fixe pris sur son axe de figure.

288. Considérons un solide de révolution homogène, fixé par un point O pris sur son axe de figure, et soumis uniquement à l'action de la pesanteur.

Imaginons par le point O (fig. 57) trois axes Ox_1, Oy_1, Oz_1 fixes dans l'espace, l'axe Oz_1 étant dirigé en sens contraire de la pesanteur ; menons par ce même point O trois axes fixes dans le corps et mobiles avec lui Ox, Oy, Oz, l'axe Oz étant dirigé suivant la partie de l'axe de révolution qui fait un angle aigu avec Oz_1 à l'instant initial.

Fig. 57.



Le centre de gravité G du corps est sur l'axe de révolution au-dessus ou au-dessous du point O. Nous désignerons par l la distance OG, et nous lui donnerons le signe + ou le signe — suivant que G sera au-dessus ou au-dessous du point O. Soit C le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe Oz qui est principal ; l'ellipsoïde central étant de révolution autour de Oz, les moments d'inertie du

corps par rapport à tous les axes menés par le point O dans le plan xy perpendiculaire à Oz sont égaux : nous les désignerons par A, et nous aurons donc $B = A$. Désignons encore par φ, ψ, θ les angles qui déterminent la position des axes mobiles Ox, Oy, Oz par rapport aux axes fixes Ox_1, Oy_1, Oz_1, et par φ', ψ', θ' les dérivées de φ, ψ, θ par rapport à t.

On sait (I, n° **110**) que le mouvement élémentaire du corps est une rotation autour d'un axe instantané OI, passant par le point O : ce mouvement peut être décomposé en trois rotations autour des axes Oz_1, Oz et OA. Par analogie avec le mouvement de rotation de la terre, on appelle *rotation propre* du solide celle qui s'effectue autour de son axe principal Oz ; *précession*, la rotation qui s'effectue autour de l'axe Oz_1, et qui produit le déplacement de la droite OA, que l'on appelle la *ligne des nœuds; nutation*, la rotation autour de OA, qui produit la variation de l'angle zOz_1 : les vitesses angulaires de ces mouvements sont respectivement égales à $\frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$.

La seule force motrice est le poids du corps $P = Mg$, appliqué au centre de gravité de ce corps, M étant sa masse.

La solution du problème sera donnée par les équations (n° **250**) :

$$\begin{aligned} p &= \varphi' \sin\theta \sin\psi + \theta' \cos\psi, \\ q &= \varphi' \sin\theta \cos\psi - \theta' \sin\psi, \qquad (1) \\ r &= \psi' + \varphi' \cos\theta, \end{aligned}$$

jointes aux équations d'Euler (n° **263**) dans lesquelles on fait $B = A$:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - A) qr = L, \tag{2}$$

$$A \frac{dq}{dt} - (C - A) pr = M, \tag{3}$$

$$C \frac{dr}{dt} = N. \tag{4}$$

Or, N est la projection sur l'axe Oz de l'axe du couple résultant des forces extérieures, c'est-à-dire de l'axe du couple résultant de la translation de Mg à l'origine. Cet axe étant évidemment dirigé suivant OA, perpendiculaire au plan zOz_1, sa projection sur Oz est nulle, et, par suite, $N = 0$.

Par conséquent, la troisième équation d'Euler nous donne :

$$C \frac{dr}{dt} = 0. \tag{5}$$

Les équations du mouvement sont donc les équations (2), (3) et (5), et la question se réduit à l'intégration des équations (1), (2), (3) et (5). Mais, nous emploierons une autre méthode qui nous conduira à une solution plus simple.

289. Remarquons d'abord que, pour établir les équations générales du mouvement (équations d'Euler), nous avons pris pour axes fixes dans le corps et mobiles avec lui les trois axes principaux du corps relatifs au point O. Dans le problème actuel, nous pourrons prendre pour axes principaux l'axe de révolution Oz

et deux axes OA et OB perpendiculaires entre eux, et situés dans le plan des xy, l'axe OA étant l'intersection du plan des xy avec le plan x_1y_1 ; l'axe OA est évidemment perpendiculaire au plan zOz_1, et l'axe OB est dans ce plan : c'est l'intersection du plan zOz_1 avec le plan xy.

Cela posé, nous pouvons prendre comme équations du mouvement l'équation (5) et deux autres équations fournies, comme nous allons le voir, par le théorème des forces vives, et le théorème des moments des quantités de mouvement.

L'équation (5) nous donne :

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où :

$$r = const. = n,$$

n étant la composante suivant Oz de la vitesse angulaire initiale.

La troisième équation (1) devient alors :

$$\psi' + \varphi' \cos\theta = n\,; \qquad (6)$$

d'autre part, le corps étant soumis à l'action de la pesanteur seule, il existe une *fonction de force*, et l'*intégrale des forces vives existe* (n° **201**). Elle nous donne (n° **254**) :

$$Ap^2 + Aq^2 + Cn^2 = 2\Sigma\mathfrak{T}F_e.$$

Or, on a :

$$\Sigma \mathcal{T} F_e = - \Sigma \int_o^t mgdz = - g\,(\Sigma mz)_o^t = - Mg\,(z_1)_o^t$$

$$= - Mg \left\{ z_1 - (z_1)_o \right\},$$

z_1 étant la coordonnée du point G par rapport à l'axe Oz_1 ; mais, on a : $z_1 = l \cos\theta$, $(z_1)_0 = l \cos\alpha$, en désignant par α la valeur initiale de l'angle θ.

Par conséquent,

$$\Sigma \mathcal{T} F_e = Mgl\,(\cos\alpha - \cos\theta)\,;$$

d'ailleurs, on a aussi :

$$p^2 + q^2 = \theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta,$$

et l'équation des forces vives est donc :

$$A\,(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta) + Cn^2 = 2Mgl\,(\cos\alpha - \cos\theta) + h, \quad (7)$$

h étant une constante qui se détermine par les circonstances initiales.

Enfin, l'axe du couple résultant des forces extérieures étant dirigé suivant la droite OA, perpendiculaire à Oz_1, il en résulte que la somme des moments des forces extérieures par rapport à Oz_1 est nulle. Par conséquent (n° **187**), la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Oz_1 est constante pendant toute la durée du mouvement.

Pour obtenir la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à Oz_1, nous prendrons les

sommes des moments par rapport aux trois axes principaux rectangulaires OA, OB, Oz, et nous ferons la somme des projections de ces moments sur Oz_1. Or, il est évident que la somme des moments par rapport à OA est $Ap\cos\psi - Aq\sin\psi = A\theta'$; la somme des moments par rapport à OB est $Ap\sin\psi + Aq\cos\psi = A\varphi'\sin\theta$, et la somme des moments par rapport à Oz est Cn. Donc, la somme des moments par rapport à Oz_1 est :

$$A\theta'\cos(AOz_1) + A\varphi'\sin\theta\cos(BOz_1) + Cn\cos(zOz_1)$$

$$= A\varphi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta\,;$$

nous aurons donc l'équation :

$$A\varphi'\sin^2\theta + Cn\cos\theta = k, \qquad (8)$$

k étant une constante déterminée par les circonstances initiales.

Les équations (6), (7) et (8) qui sont du premier ordre entre les variables φ, ψ, θ et le temps t serviront à déterminer ces variables en fonction de t, et, par conséquent, la position du corps à un instant quelconque.

290. De l'équation (8) on tire :

$$\varphi' = \frac{k - Cn\cos\theta}{A\sin^2\theta}\,;$$

substituant dans l'équation (7), il vient :

$$A\theta'^2 + \frac{1}{A\sin^2\theta}(k - Cn\cos\theta)^2 = 2Mgl(\cos\alpha - \cos\theta) + h - Cn^2,$$

ou bien, en posant :

$$2Mgl \cos \alpha + h - Cn^2 = H,$$

on a l'équation :

$$A\theta'^2 + \frac{1}{A \sin^2 \theta} (k - Cn \cos \theta)^2 = H - 2Mgl \cos \theta.$$

Pour intégrer cette équation, on pose $\cos \theta = u$, et l'on obtient :

$$A^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = A (1 - u^2) (H - 2Mglu) - (k - Cnu)^2,$$

d'où l'on tire :

$$dt = \pm \frac{A du}{\sqrt{A (1 - u^2) (H - 2Mglu) - (k - Cnu)^2}}.$$

Cette équation détermine t en fonction de u, et, par suite, u en fonction de t, c'est-à-dire θ en fonction de t.

D'autre part, l'équation :

$$\varphi' = \frac{k - Cn \cos \theta}{A \sin^2 \theta},$$

nous donne :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{k - Cnu}{A (1 - u^2)}.$$

Or, u étant connu en fonction de t, cette dernière équation nous donnera φ en fonction de t.

Enfin, de l'équation (6) on tire la suivante :

$$\frac{d\psi}{dt} = n - \frac{(k - Cnu)\,u}{A\,(1 - u^2)},$$

laquelle détermine ψ en fonction de t.

On voit que la solution du problème dépend des intégrales elliptiques.

291. Cas particulier. — Supposons que le mouvement initial soit une rotation autour de l'axe de figure Oz : alors, les composantes p_0, q_0 de la vitesse angulaire initiale sont nulles, et les équations :

$$p \cos\psi - q \sin\psi = \theta',$$

$$p \sin\psi + q \cos\psi = \varphi' \sin\theta,$$

que l'on déduit facilement des deux premières équations (1) nous donnent $\theta'_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0$, et des équations (7) et (8) on conclut, en y faisant $t = 0$,

$$h = Cn^2,$$

$$k = Cn \cos\alpha.$$

Les équations du mouvement sont alors les suivantes :

$$\psi' + \varphi' \cos\theta = n,$$

$$A\,(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta) = 2Mgl\,(\cos\alpha - \cos\theta), \qquad (9)$$

$$A\varphi' \sin^2\theta = Cn\,(\cos\alpha - \cos\theta).$$

Proposons-nous de discuter ces équations. D'abord de ce que le premier membre de la seconde est positif, il doit en être de même du second membre : d'où il

résulte que l et $\cos\alpha - \cos\theta$ sont de même signe. Donc, si, au commencement du mouvement, pour $t = 0$, on a $l > 0$, c'est-à-dire si le centre de gravité est au-dessus du point fixe, on aura $\cos\alpha - \cos\theta > 0$, d'où $\cos\alpha > \cos\theta$, et, par suite, $\theta > \alpha$. Par conséquent, l'axe de figure Oz fera avec la verticale Oz_1 un angle θ qui sera constamment plus grand que l'angle initial α.

Si, au contraire, pour $t = 0$, on a $l < 0$, c'est-à-dire si le centre de gravité est en dessous du point fixe, on aura $\cos\alpha - \cos\theta < 0$, d'où $\cos\alpha < \cos\theta$, et, par suite, $\theta < \alpha$. Par conséquent, l'axe de figure Oz fera avec Oz_1 un angle θ qui sera constamment plus petit que l'angle initial α.

De l'équation :

$$A\varphi' \sin^2\theta = Cn(\cos\alpha - \cos\theta),$$

il résulte que φ' est de même signe que $n(\cos\alpha - \cos\theta)$. Or, si $l > 0$, on a $\cos\alpha - \cos\theta > 0$; par conséquent, φ' et n seront de même signe, et, par suite, le sens de la rotation de OA autour de Oz_1 est le même que celui de la rotation initiale autour de Oz ; si $l < 0$, on a $\cos\alpha - \cos\theta < 0$; par conséquent, φ' et n sont de signes contraires.

Le mouvement de la droite OA ou du plan z_1OA autour de la verticale Oz_1 est *le mouvement de précession* (n° **288**). On voit donc que *le mouvement de précession est de même sens que le mouvement initial de rotation autour de l'axe de figure, ou de sens contraire, suivant que le centre de gravité du corps est au-dessus ou au-dessous du point fixe à l'origine du mouvement.*

292. Si l'on élimine φ' entre les deux dernières équations (9), il vient :

$$\theta'^2 = \frac{2Mgl}{A}(\cos\alpha - \cos\theta) - \frac{C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{1}{A}\sqrt{(\cos\alpha - \cos\theta)\left\{2MAgl - \frac{C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta)}{\sin^2\theta}\right\}}.$$

Le second membre ayant le signe $\pm$ il s'ensuit que l'angle θ peut croître ou décroître lorsque t augmente.

Si nous supposons $l > 0$, on aura $\cos\alpha - \cos\theta > 0$, d'où $\theta > \alpha$; par conséquent, θ commence par croître, et l'on a $d\theta > 0$; il faudra prendre le radical avec le signe $+$, jusqu'à ce que θ prenne une valeur β telle que le radical soit nul.

Par conséquent, l'angle θ croît jusqu'à la valeur pour laquelle on a :

$$2MAgl\sin^2\theta - C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta) = 0.$$

Il est évident qu'il existe une valeur de θ satisfaisant à cette équation, puisque le premier membre est positif pour $\theta = \alpha$, et négatif pour $\theta = \pi$. Désignons par T le temps employé pour atteindre cette valeur $\theta = \beta$. A partir de l'instant où $\theta = \beta$, l'angle θ diminue ; car, s'il continuait à croître, θ' deviendrait imaginaire : en effet, $\cos\alpha - \cos\theta$ resterait positif, et le second facteur serait négatif. Or, θ diminuant, θ' devient négatif, et l'on devra prendre le signe — devant le radical ; θ décroît en se rapprochant de la valeur

initiale α qu'il prendra au bout d'un temps T. Pour $\theta = \alpha$, θ' est nul, et change de signe ; l'angle θ croît encore depuis α jusque β dans le temps T, et ainsi de suite.

Donc, *l'angle* θ *varie entre sa valeur minimum* α *et sa valeur maximum* β. *L'axe de figure* Oz *exécute des oscillations isochrones dans le plan* zOz_1 *tournant autour de la verticale* Oz_1. *L'amplitude des oscillations est constante.* Ce mouvement oscillatoire est le *mouvement de nutation.*

La *durée d'une demi oscillation* est donnée par la formule :

$$T = A\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{(\cos\alpha - \cos\theta)\left\{2MAgl\sin^2\theta - (\cos\alpha - \cos\theta)C^2n^2\right\}}},$$

laquelle dépend des intégrales elliptiques.

De la formule :

$$A\varphi' \sin^2\theta = Cn\,(\cos\alpha - \cos\theta),$$

on conclut que φ', c'est-à-dire la vitesse angulaire de la trace OA, est une fonction de θ seulement, et qu'elle varie périodiquement avec θ. D'ailleurs, pour $\theta = \alpha$, on a $\varphi' = 0$, et, en outre, φ' est toujours de même signe que n. Donc, *le plan* zOz_1 *tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire tantôt croissante, tantôt décroissante, mais toujours dans le même sens.*

293. Enfin, la vitesse angulaire ω du mouvement de rotation est déterminée par la formule :

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

qui nous donne, dans le cas actuel,

$$\omega^2 = \theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta + n^2,$$

ou bien :

$$\omega^2 = n^2 + \frac{2Mgl}{A}(\cos\alpha - \cos\theta).$$

Il résulte de cette formule que ω *varie périodiquement entre la valeur minimum n qui correspond à $\theta = \alpha$, et la valeur maximum qui correspond à $\theta = \beta$.*

Gyroscope de Foucault.

294. Le gyroscope est un solide de révolution pesant et homogène animé d'une grande vitesse autour de son axe de figure, et assujetti à tourner autour d'un point fixe O pris sur cet axe. Nous aurons donc (n° **292**) l'équation :

$$A^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\sin^2\theta = 2MAgl\sin^2\theta(\cos\alpha - \cos\theta) - C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta)^2.$$

Le premier membre de cette équation étant toujours positif, il doit en être de même du second membre; donc, le second terme $-\,C^2n^2(\cos\alpha - \cos\theta)^2$, qui est négatif, doit être moindre en valeur absolue que le premier terme qui est *nécessairement positif.* Comme n^2 est très grand, il en résulte que le coefficient

$(\cos\alpha - \cos\theta)^2$ doit être très petit, et, par conséquent, que α et θ diffèrent très peu l'un de l'autre. Nous pourrons donc poser :

$$\theta = \alpha + \varepsilon,$$

ε étant une quantité très petite en valeur absolue, positive ou négative suivant que l sera positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que le centre de gravité sera au-dessus ou au-dessous du point fixe (n° **288**) au commencement du mouvement; cette quantité ε étant très petite, nous pourrons en négliger le carré et les puissances supérieures.

Nous aurons ainsi :

$$\cos\alpha - \cos\theta = \varepsilon \sin\alpha,$$

$$\sin\theta = \sin\alpha + \varepsilon\cos\alpha,$$

$$\sin^2\theta = \sin^2\alpha + 2\varepsilon \sin\alpha\cos\alpha;$$

d'ailleurs, on a rigoureusement :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt},$$

et il vient, par conséquent :

$$A^2\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)\sin^2\alpha + 2A^2\varepsilon\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$= 2MAgl\varepsilon\sin\alpha(\sin^2\alpha + 2\varepsilon\sin\alpha\cos\alpha) - C^2n^2\varepsilon^2\sin^2\alpha.$$

Nous négligerons dans le premier membre le produit $\varepsilon\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2$ qui est du troisième ordre, et dans le second

membre le terme $4MAgl\varepsilon^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$ qui est du second ordre ; mais, nous conserverons dans le second membre le terme $C^2n^2\varepsilon^2 \sin^2 \alpha$ qui n'est pas négligeable à cause du facteur n^2 qui est très grand. Nous aurons alors :

$$A^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 \sin^2 \alpha = \varepsilon \sin \alpha \left\{ 2MAgl \sin^2 \alpha - C^2n^2 \varepsilon \sin \alpha \right\},$$

ou bien :

$$A^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = \varepsilon \left\{ 2MAgl \sin \alpha - C^2n^2\varepsilon \right\}.$$

Or, le premier membre étant toujours positif, il doit en être de même du second membre ; il en résulte que ε ne peut varier qu'entre 0 et $\frac{2MAgl \sin \alpha}{C^2n^2}$. Cette dernière valeur qui est donc le maximum de ε est la limite de la nutation de l'axe ; nous la désignerons par ε_1, et nous poserons :

$$\varepsilon_1 = \frac{2MAgl \sin \alpha}{C^2n^2}.$$

Il vient alors :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \pm \frac{Cn}{A} \sqrt{\varepsilon (\varepsilon_1 - \varepsilon)}.$$

En raisonnant comme nous l'avons fait précédemment (n° **292**), on verra que, si nous supposons $l > 0$, ε commence par croître, et l'on devra prendre le radical avec le signe +, jusqu'à ce que ε prenne la valeur ε_1 ; à partir de cette valeur, ε décroît jusque zéro, et l'on doit donner au radical le signe —.

En prenant le radical avec le signe +, on a :

$$dt = \frac{A}{Cn} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon)}},$$

d'où, en intégrant,

$$t = \frac{A}{Cn} \arccos \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon}{\varepsilon_1},$$

la constante étant nulle, puisque $\varepsilon = 0$, pour $t = 0$.

Cette formule donne le temps écoulé correspondant à un écart égal à ε. On en tire :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}\left(1 - \cos \frac{Cnt}{A}\right) = \varepsilon_1 \sin^2 \frac{Cnt}{2A} = \frac{2MAgl \sin \alpha}{C^2n^2} \sin^2 \frac{Cnt}{2A}.$$

C'est la valeur de ε en fonction de t ; par suite, on a :

$$\theta = \alpha + \varepsilon_1 \sin^2 \frac{Cnt}{2A}.$$

On conclut de ce qui précède que l'*axe éprouve une nutation* déterminée par l'équation :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \sin^2 \frac{Cnt}{2A}.$$

Ce *mouvement est oscillatoire*, et l'on voit que la durée d'une oscillation complète de l'axe autour de la verticale Oz_1 est $\frac{2\pi A}{Cn}$; en effet, pour $t = \frac{\pi A}{Cn}$, on a $\varepsilon = \varepsilon_1$, et pour $t = \frac{2\pi A}{Cn}$, on a : $\varepsilon = 0$. L'amplitude de l'excursion totale

est ε_1, et la durée de cette excursion, c'est-à-dire la demi oscillation complète, est $\frac{\pi A}{Cn}$. Ainsi donc, l'inclinaison θ de l'axe Oz sur la verticale Oz_1 varie entre sa valeur initiale α et la valeur $\alpha + \varepsilon_1$, valeur plus grande que α, puisque $\varepsilon_1 > 0$, si l'on suppose $l > 0$.

Il est encore facile de vérifier que, si t augmente de $\frac{2\pi A}{Cn}$, ε reprend la même valeur, puisqu'alors $\frac{Cnt}{2A}$ augmente de π.

295. Cherchons maintenant la *loi du mouvement de précession :* elle est donnée par la formule :

$$A \frac{d\varphi}{dt} \sin^2 \theta = Cn (\cos \alpha - \cos \theta),$$

de laquelle on tire :

$$A \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cn\varepsilon \sin \alpha}{\sin^2 \alpha + 2\varepsilon \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{Cn\varepsilon}{\sin \alpha + 2\varepsilon \cos \alpha},$$

ou bien, en négligeant les termes du second ordre en ε, ce qui revient à négliger le terme en ε au dénominateur :

$$A \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cn\varepsilon}{\sin \alpha}.$$

De cette formule on déduit que $\frac{d\varphi}{dt}$, qui est la vitesse angulaire de la rotation du plan z_1OA autour de Oz_1, ou la *vitesse de précession*, est nulle pour $\varepsilon = 0$, et maximum pour $\varepsilon = \varepsilon_1$.

En remplaçant ε par sa valeur, il vient :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cn}{A \sin \alpha} \cdot \frac{2MAgl \sin \alpha}{C^2n^2} \sin^2 \frac{Cnt}{2A} = \frac{Mgl}{Cn}\left(1 - \cos \frac{Cnt}{A}\right),$$

et, en intégrant :

$$\varphi = \frac{Mgl}{Cn} t - \frac{MAgl}{C^2n^2} \sin \frac{Cnt}{A};$$

nous n'ajoutons pas de constante, puisque $\varphi = 0$, pour $t = 0$.

Si l'on fait abstraction du second terme qui est très petit à cause du facteur n^2 au dénominateur, on voit que le *mouvement de précession est uniforme*, et qu'il a pour vitesse angulaire $\frac{Mgl}{Cn}$. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que $\frac{Mgl}{Cn}$ est la valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dt}$; en effet, cette valeur moyenne a évidemment pour expression :

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_m = \frac{Cn}{A \sin \alpha} \frac{1}{\varepsilon_1} \int_0^{\varepsilon_1} \varepsilon d\varepsilon = \frac{Cn\varepsilon_1}{2A \sin \alpha} = \frac{Mgl}{Cn}.$$

Cette valeur moyenne de la vitesse angulaire de précession est *positive* ou *négative*, en d'autres termes, le mouvement de précession est *direct* ou *rétrograde* par rapport à la rotation n, suivant que l est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant qu'à l'instant initial le centre de gravité du corps est au-dessus ou au-dessous du point fixe O.

D'ailleurs, la formule :

$$\varphi - \frac{Mgl}{Cn} t = - \frac{MAgl}{C^2n^2} \sin \frac{Cnt}{A},$$

nous apprend que *la ligne des nœuds* OA éprouve de part et d'autre de la position moyenne qu'elle occuperait si le mouvement était uniforme, un balancement périodique déterminé par l'expression :

$$-\frac{\mathrm{MA}gl}{\mathrm{C}^2n^2}\sin\frac{\mathrm{C}nt}{\mathrm{A}},$$

et la durée de la période est égale à $\frac{2\pi\mathrm{A}}{\mathrm{C}n}$.

On voit donc que ces deux mouvements périodiques sont de même durée.

296. Pour déterminer le *mouvement propre du corps*, on prendra la formule (6) (n° **289**) :

$$n = \psi' + \varphi'\cos\theta,$$

de laquelle on tire :

$$\frac{d\psi}{dt} = n - \frac{d\varphi}{dt}\cos(\alpha + \varepsilon),$$

ou bien, en négligeant les termes du second ordre en ε :

$$\frac{d\psi}{dt} = n - \frac{\mathrm{C}n\varepsilon}{\mathrm{A}\sin\alpha}\cos\alpha,$$

et, en remplaçant ε par sa valeur (n° **294**) :

$$\frac{d\psi}{dt} = n - \frac{\mathrm{M}gl}{\mathrm{C}n}\left(1 - \cos\frac{\mathrm{C}nt}{\mathrm{A}}\right)\cos\alpha.$$

En intégrant, il vient :

$$\psi = nt - \frac{\mathrm{M}gl}{\mathrm{C}n}\cos\alpha \,.\, t + \frac{\mathrm{MA}gl}{\mathrm{C}^2n^2}\sin\frac{\mathrm{C}nt}{\mathrm{A}}\cos\alpha.$$

Le premier terme nt qui est proportionnel au temps croît rapidement à cause du facteur n. Le second terme croît aussi proportionnellement au temps ; mais, son coefficient est très petit, puisque n est au dénominateur. Enfin, le troisième terme est périodique, et sa valeur est très petite à cause du facteur n^2 au dénominateur. Si l'on néglige ce dernier terme, on voit que la droite OA se meut avec une très grande vitesse à peu près uniformément dans le plan de l'équateur xy, et dans le sens de la rotation initiale n autour de Oz.

297. Remarque. — Le mouvement est indépendant de la densité du corps solide, s'il est homogène. En effet, les formules ne renferment que les rapports $\frac{M}{A}$ et $\frac{A}{C}$: or, ces rapports contiennent en facteur au numérateur et au dénominateur la densité ρ, qui disparaîtra donc dans ces rapports, et, par conséquent, dans les formules. Il résulte de là que la vérification des résultats précédents peut se faire quelle que soit la nature de l'appareil employé, pourvu qu'il soit homogène.

CHAPITRE VIII.

Mouvement d'un corps libre.

298. Étant donné un corps solide libre dans l'espace, et sollicité par des forces données, le mouvement de ce corps peut, à chaque instant, être considéré comme résultant d'un mouvement de translation d'un point du corps, par exemple, le centre de gravité, et d'une rotation autour de ce point supposé fixe (I, n° **111**).

Nous supposerons que, par le centre de gravité, on mène trois axes Gx, Gy, Gz constamment parallèles aux axes fixes de l'espace. Le mouvement de translation de ce système de comparaison sera connu quand on connaîtra le mouvement du centre de gravité. Le mouvement *relatif* du corps par rapport au système de comparaison Gx, Gy, Gz se ramène au mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Or, le centre de gravité se meut comme si la masse totale du corps y était concentrée, et si toutes les forces extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes (n° **178**). Il est donc facile d'établir les équations du mouvement de ce point.

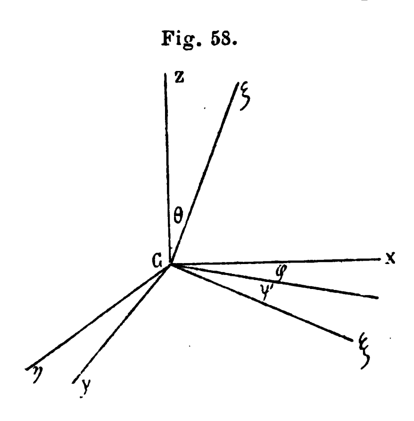
Pour obtenir les équations du mouvement du corps par rapport aux axes mobiles Gx, Gy, Gz passant par le centre de gravité, nous rappellerons (n° **189**) que le théorème des moments des quantités de mouvement subsiste quand on rapporte les moments des quantités

de mouvement et les moments des forces extérieures à des axes passant par le centre de gravité et animés d'un simple mouvement de translation. Il en résulte que, si l'on considère le mouvement par rapport aux axes Gx, Gy, Gz, les sommes des moments des forces extérieures par rapport à ces axes sont égales aux projections de la vitesse de l'extrémité de l'axe du couple des quantités de mouvement relatives. Par conséquent, les équations d'Euler sont applicables au mouvement relatif du corps par rapport aux axes Gx, Gy, Gz. Nous aurons donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un corps solide libre se meut sous l'action de forces extérieures données, le mouvement de son centre de gravité se détermine en y supposant toute la masse concentrée et toutes les forces motrices transportées parallèlement à elles-mêmes. Le mouvement du corps autour de son centre de gravité se détermine en considérant ce point comme fixe, en supposant toutes les forces extérieures appliquées au corps, et en appliquant la théorie du mouvement autour d'un point fixe.*

299. Si donc nous désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes fixes de l'espace, par X, Y, Z les composantes de l'une des forces appliquées au corps, suivant ces mêmes axes, par p, q, r les composantes de la vitesse angulaire ω relative au point G suivant les axes

Fig. 58.



principaux d'inertie $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, par φ, ψ, θ (fig. 58) les angles qui déterminent la position de ces axes principaux par rapport aux axes Gx, Gy, Gz, *constamment parallèles aux axes fixes*, nous aurons les équations du mouvement :

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X,$$

$$M \frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y,$$

$$M \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z,$$

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr = L,$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp = M,$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = N,$$

$$p = \frac{d\theta}{dt} \cos\psi + \frac{d\varphi}{dt} \sin\psi \sin\theta,$$

$$q = -\frac{d\theta}{dt} \sin\psi + \frac{d\varphi}{dt} \cos\psi \sin\theta,$$

$$r = \frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta,$$

L, M, N étant les sommes des moments des forces extérieures par rapport aux axes principaux $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$.

Ces équations serviront à déterminer $x_1, y_1, z_1, \varphi, \psi, \theta$ en fonction de t.

300. REMARQUE. — Il résulte de ce que nous venons de voir que le mouvement d'un corps solide libre se réduit à deux mouvements entièrement distincts : le mouvement du centre de gravité, et le mouvement du corps autour de son centre de gravité considéré comme fixe.

301. Si les forces extérieures ne dépendent que du temps, ou de la position du centre de gravité, on peut déterminer isolément le mouvement du centre de gravité, c'est-à-dire x_1, y_1, z_1 en fonction de t, au moyen des trois premières équations, sans avoir égard aux équations du mouvement de rotation.

Mais, en général, les forces motrices dépendent de la position du corps, c'est-à-dire des angles φ, ψ, θ, et alors il n'est plus possible de traiter séparément les deux mouvements.

302. CAS PARTICULIERS. — 1° Si les forces qui sollicitent le corps sont nulles, le centre de gravité aura un mouvement rectiligne et uniforme (n° **179**). Le mouvement du corps autour du centre de gravité satisfait au théorème de Poinsot (n° **275**).

2° Si les forces se réduisent à la pesanteur seule, le corps étant lancé avec une vitesse initiale donnée au-dessus de la surface de la terre, le centre de gravité décrira un parabole (n° **55**), et le corps tournera autour de ce point comme s'il était fixe. Les forces se réduisant dans ce cas à une résultante unique égale au poids du corps et passant par son centre de gravité, le moment de cette résultante par rapport à un axe quelconque passant par le centre de gravité sera nul, et le théorème de Poinsot (n° **275**) sera encore applicable au mouvement relatif autour du centre de gravité.

3° Si le corps solide est une sphère pesante et homogène, l'ellipsoïde central est une sphère, et, par conséquent, A = B = C. D'ailleurs, on a aussi L = M = N = 0. Par suite, dans ce cas, les équations d'Euler nous donnent pour p, q, r des valeurs constantes ; il en est de même de ω. Il résulte de là que l'axe de rotation du corps autour de son centre de gravité reste toujours parallèle à une même direction, et la vitesse angulaire est constante.

4° Si le corps solide est une sphère homogène dont tous les points sont attirés par un centre fixe, en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances, le centre de gravité décrira une section conique (n° **124**). D'autre part, les actions exercées par le centre fixe sur les différents points du corps se réduisant à une résultante unique passant par le centre, il s'ensuit que les moments de ces forces sont nuls ; d'ailleurs, le corps étant une sphère, on a : A = B = C, et les équations d'Euler nous donneront pour p, q, r des valeurs constantes. Par conséquent, la sphère aura un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, constamment parallèle à une direction donnée.

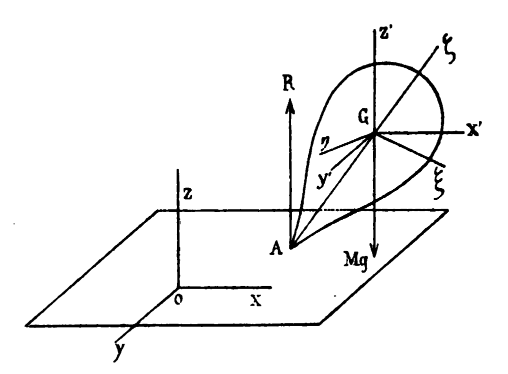
303. Remarque. — Il résulte de la théorie que nous venons d'exposer une remarque importante. Nous avons vu, en Statique (I, n° **286**), que les forces appliquées à un corps solide peuvent se réduire à une force unique et un couple unique. Si l'on prend pour origine le centre de gravité du corps, le mouvement du centre de gravité est produit par la force unique, sans que le couple ait aucune influence ; le couple produit la rotation du corps autour de son centre de gravité, sans que la force unique ait aucune influence.

Problème de la Toupie.

304. *Un corps solide pesant et homogène, de révolution autour d'un axe passant par son centre de gravité, s'appuie par un point* A *de son axe sur un plan horizontal parfaitement poli. On demande le mouvement de ce corps.*

Soient M la masse du corps, Mg son poids appliqué au centre de gravité G (fig. 59), R la réaction normale du plan, réaction qui est verticale ; Ox, Oy, Oz trois

Fig. 59.



axes fixes rectangulaires, l'origine O étant dans le plan fixe, l'axe Oz vertical et dirigé vers le haut, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité du corps.

Les forces qui agissent sur le corps rendu libre sont : le poids Mg du corps au point G, et la réaction R au point A.

On a donc pour les équations du mouvement du centre de gravité :

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \quad M \frac{d^2z_1}{dt^2} = R - Mg;$$

on en tire :

$$x_1 = \alpha t + \alpha', \quad y_1 = \beta t + \beta', \tag{1}$$

$$R = M\left(g + \frac{d^2z_1}{dt^2}\right). \tag{2}$$

Les équations (1) nous apprennent que *la projection du centre de gravité sur le plan d'appui est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme.*

L'équation (2) détermine la réaction R, lorsque z_1 est connu en fonction de t.

305. Étudions le mouvement relatif du corps autour de son centre de gravité. Observons d'abord que $G\zeta$ étant un axe principal d'inertie du point G, deux axes quelconques perpendiculaires entre eux, et à $G\zeta$ forment avec $G\zeta$ un système de trois axes principaux. D'ailleurs, l'ellipsoïde d'inertie étant de révolution, désignons par C le moment d'inertie relatif à $G\zeta$, et soit A le moment d'inertie relatif à $G\xi$ et à $G\eta$ (ces deux moments étant égaux, ou bien $A = B$).

La troisième équation d'Euler (n° **263**) est :

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq = N.$$

Or, N = 0, puisque les forces extérieures R et Mg rencontrent l'axe Gζ ; d'autre part, on a B = A, et, par suite,

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

ou bien :

$$r = const. = n.$$

Imaginons trois axes Gx', Gy', Gz' (fig. 59), menés par le point G, parallèlement aux axes fixes du point O, et appliquons au mouvement autour du centre de gravité le théorème des forces vives et le théorème des moments des quantités de mouvement.

En désignant par 2T la force vive du corps, on a :

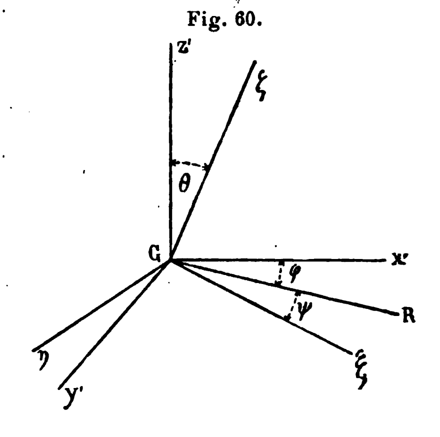
$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = A(p^2 + q^2) + Cn^2;$$

et en remplaçant p et q par leurs valeurs (fig. 60) :

$$p = \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\theta \sin\psi,$$

$$q = -\theta' \sin\psi + \varphi' \sin\theta \cos\psi,$$

Fig. 60.



nous aurons :

$$2T = A(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta) + Cn^2.$$

Cherchons maintenant la somme des travaux des forces. A cet effet, observons que les coordonnées du point d'application de R étant 0, 0, — z_1, le travail élémentaire de cette force est — Rdz_1.

D'autre part, les coordonnées du point d'application de la force Mg étant nulles, le travail élémentaire de cette force est nul. Donc, la somme des travaux des forces est $-\int Rdz_1$, et nous aurons pour l'équation des forces vives :

$$A(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta) + Cn^2 = -2\int Rdz_1 = -2M\int\left(g + \frac{d^2z_1}{dt^2}\right)dz_1$$

$$= -2Mg\left(z_1 - (z_1)_0\right) - M\left\{\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz_1}{dt}\right)_0^2\right\}.$$

En désignant par l la distance du centre de gravité G au point A, on a :

$$z_1 = l\cos\theta, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz_1}{dt} = -l\sin\theta \, . \, \theta',$$

et l'équation des forces vives devient alors :

$$A(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta) + Cn^2 = -2Mgl\cos\theta + 2Mg(z_1)_0$$

$$- Ml^2 \sin^2\theta \, . \, \theta'^2 + M\left(\frac{dz_1}{dt}\right)_0^2,$$

ou bien :

$$(A + Ml^2 \sin^2 \theta)\, \theta'^2 + A \sin^2 \theta \,.\, \varphi'^2 = h - 2Mgl \cos \theta, \quad (3)$$

h étant une constante.

Appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement à l'axe Gz' : nous écrirons que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à cet axe est constante, puisque les moments des forces extérieures R et Mg par rapport à Gz' sont nuls, ces forces étant parallèles à l'axe. Or, les sommes des moments des quantités de mouvement par rapport aux axes $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ sont Ap, Aq, Cr ; par conséquent, la somme des moments par rapport à Gz' est :

$$Ap \cos(\xi, z') + Aq \cos(\eta, z') + Cr \cos(\zeta, z').$$

Mais, on a (fig. 60) :

$$\cos(\xi, z') = \sin\psi \sin\theta, \quad \cos(\eta, z') = \cos\psi \sin\theta, \quad \cos(\zeta, z') = \cos\theta.$$

Par conséquent, la somme des moments des quantités de mouvement est :

$$Ap \sin\psi \sin\theta + Aq \cos\psi \sin\theta + Cr \cos\theta = A \sin^2\theta \,.\, \varphi' + Cn \cos\theta.$$

L'équation des moments nous donne donc :

$$A \sin^2 \theta \,.\, \varphi' + Cn \cos \theta = k, \quad (4)$$

k étant une constante.

En éliminant φ' entre les équations (3) et (4), il vient :

$$dt = \pm \frac{\sqrt{A}\sin\theta\, d\theta \sqrt{A + Ml^2\sin^2\theta}}{\sqrt{A\sin^2\theta\,(h - 2Mgl\cos\theta) - (k - Cn\cos\theta)^2}}, \quad (5)$$

équation qui détermine θ en fonction de t.

306. Discutons maintenant les équations que nous venons d'obtenir. Supposons que le corps ait reçu une vitesse initiale assez grande autour de son axe de figure : les valeurs initiales de p et q seront nulles, et, par conséquent, il en sera de même des valeurs initiales de φ' et θ'.

Désignons par a la valeur initiale de θ, et faisons $t = 0$ dans les équations (3) et (4) ; nous aurons :

$$h = 2Mgl\cos a, \quad k = Cn\cos a.$$

Par suite, les équations (3), (4) et (5) nous donnent :

$$(A + Ml^2\sin^2\theta)\,\theta'^2 + A\sin^2\theta\,.\,\varphi'^2 = 2Mgl(\cos a - \cos\theta), \quad (6)$$

$$A\sin^2\theta\,.\,\varphi' = Cn\,(\cos a - \cos\theta), \quad (7)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{\sqrt{A(A + Ml^2\sin^2\theta)}}\sqrt{(\cos a - \cos\theta)\left\{2MAgl - C^2n^2\frac{\cos a - \cos\theta}{\sin^2\theta}\right\}}. \quad (8)$$

Le premier membre de l'équation (6) étant positif, il en est de même du second membre ; donc, $l(\cos a - \cos\theta) > 0$.

Or, l est positif, puisque le centre de gravité est au-dessus du plan fixe ; par conséquent, on a :

$$\cos a - \cos\theta > 0, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta < \cos a, \quad \text{et} \quad \theta > a.$$

Donc, l'axe de figure fera constamment avec la verticale un angle θ plus grand que l'angle initial a.

D'autre part, l'équation (7) nous apprend que φ' est de même signe que le produit n $(\cos a - \cos\theta)$, et comme $\cos a - \cos\theta > 0$, il s'ensuit que φ' et n sont de même signe. Donc, le sens de la rotation de la trace GR autour de l'axe Gz' est le même que celui de la rotation du corps autour de $G\zeta$. Le mouvement de la trace GR, ou du plan vertical z'GR autour de Gz' est le mouvement de précession (n° **288**). On peut donc dire que *le mouvement de précession est de même sens que le mouvement de rotation initial autour de l'axe de figure* $G\zeta$.

307. Considérons maintenant l'équation (8) : d'abord, puisque $\theta > a$, il s'ensuit que l'angle θ commence par croître, et, par conséquent, $d\theta > 0$. On doit donc prendre le signe + devant le radical, et le conserver aussi longtemps que θ ne passe pas par une valeur qui annule le radical, valeur qui annule θ'. L'angle θ croît donc jusqu'à une valeur b pour laquelle on aura :

$$2MAgl\sin^2\theta - C^2n^2(\cos a - \cos\theta) = 0.$$

Cette valeur b existe nécessairement, puisque, pour $\theta = a$, le premier membre est > 0, et que pour $\theta = \pi$, il est < 0.

Désignons par T le temps qui s'est écoulé depuis $\theta = a$ jusque $\theta = b$. Après ce temps T, θ diminue : car, si θ

continuait à croître, le second facteur sous le radical dans l'équation (8) deviendrait négatif, et comme le premier facteur $\cos a - \cos \theta$ est positif, le radical, et par conséquent $\frac{d\theta}{dt}$ serait imaginaire.

Donc, à partir de $\theta = b$, l'angle θ diminue, $\frac{d\theta}{dt}$ devient négatif, et θ se rapproche de a : il reprend cette valeur après un temps égal à T. En effet, de b à a, on doit prendre le signe — dans le second membre de l'équation (8), et intégrer entre les limites b et a, ce qui donne le même résultat que tantôt. Pour $\theta = a$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, et, à partir de là, $\frac{d\theta}{dt}$ devient positif ; θ croît de a à b, et ainsi de suite.

Le temps T d'une demi révolution est donné par la formule :

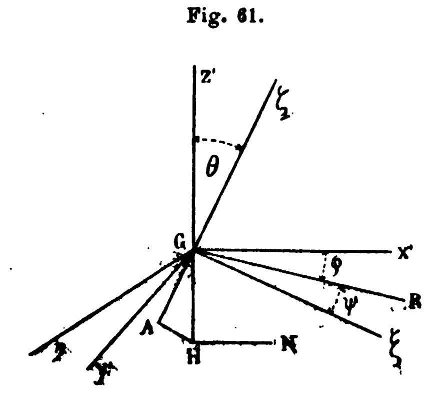
$$T = \int_a^b \frac{\sqrt{A(A + Ml^2 \sin^2 \theta)} \sin \theta d\theta}{\sqrt{(\cos a - \cos \theta) \left\{ 2MAgl - \frac{C^2 n^2 (\cos a - \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \right\}}}.$$

Ainsi donc, θ *varie constamment entre deux limites, l'une minimum et égale à* a, *l'autre maximum et égale à* b. *L'axe* $G\zeta$ *exécute des oscillations isochrones dont l'amplitude est constante dans le plan* $z'G\zeta$ *lequel tourne autour de la verticale* Gz'. *Le mouvement oscillatoire de* $G\zeta$ *est le mouvement de nutation* (n° **288**).

308. Supposons, en particulier, que la vitesse horizontale du point G soit nulle : alors, le point H, projection de G sur le plan horizontal sera fixe pendant toute la durée du mouvement. Il est facile de trouver de la manière suivante *la courbe décrite sur le plan horizontal par la pointe* A *de la toupie autour du point* H.

Posons AH $= \rho$, et soit AHN $= \omega$ (fig. 61) l'angle que fait ce rayon ρ avec la parallèle HN à Gx' menée par le point H ; ρ et ω seront les coordonnées polaires du

Fig. 61.



point A, H étant le pôle. Cela posé, HN est perpendiculaire à z'GH dans le plan z'Gx', et HA est perpendiculaire à z'GH dans le plan z'GR ; donc,

$$\widehat{AHN} = 180^\circ - \varphi, \quad \text{d'où} \quad \omega = 180^\circ - \varphi.$$

D'ailleurs, le triangle rectangle AGH nous donne :

$$\rho = AG \sin\theta = l \sin\theta.$$

Or, θ varie entre les limites a et b ; donc, ρ varie entre les limites $l \sin a$ et $l \sin b$, c'est-à-dire que le point A décrit une courbe comprise entre deux circonférences de rayons $l \sin a$ et $l \sin b$. D'autre part, si l'on

désigne par ε l'angle que la tangente à la courbe fait avec le rayon vecteur ρ, on a :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\rho d\omega}{d\rho} = -\frac{l \sin \theta d\psi}{d \, . \, l \sin \theta} = -\frac{\sin \theta \frac{d\psi}{dt}}{\cos \theta \frac{d\theta}{dt}}.$$

En remplaçant $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ par leurs valeurs (7) et (8), il vient :

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{\sin \theta \frac{Cn(\cos a - \cos \theta)}{A \sin^2 \theta}}{\cos \theta \frac{1}{\sqrt{A(A + Ml^2 \sin^2 \theta)}} \sqrt{(\cos a - \cos \theta) \left\{ 2MAgl - C^2 n^2 \frac{\cos a - \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right\}}}$$

$$= -\frac{Cn \sqrt{\cos a - \cos \theta} \sqrt{A(A + Ml^2 \sin^2 \theta)}}{A \cos \theta \sqrt{2MAgl \sin^2 \theta - C^2 n^2 (\cos a - \cos \theta)}}.$$

Or, pour $\theta = a$, on a $\operatorname{tg} \varepsilon = 0$; d'où $\varepsilon = 0$, et la tangente coïncide avec le rayon vecteur : la courbe est donc normale au cercle de rayon $l \sin a$. De même, pour $\theta = b$, le radical du dénominateur est nul, et l'on a $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$, d'où $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, et la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur, c'est-à-dire que la courbe est tangente au cercle de rayon $l \sin b$, ou à la circonférence extérieure.

Il résulte de là que *la pointe de la toupie décrit sur le plan de projection autour de* H, *une espèce de rosace composée d'une série d'arcs égaux, tangents à la circonférence extérieure et normaux à la circonférence intérieure.*

CHAPITRE IX.

Mouvement des solides naturels. Choc des corps.

309. Les théories que nous avons exposées dans les chapitres précédents supposent que le solide considéré est de forme invariable, c'est-à-dire qu'il conserve la même forme pendant toute la durée du mouvement. Or, les solides naturels ne sont pas, en général, dans ce cas. Cependant, il existe dans la nature un grand nombre de corps pour lesquels les changements de forme sont insensibles, c'est-à-dire qui ne se déforment que de quantités inappréciables sous l'action des forces qui leur sont appliquées. Tels sont les matériaux qui entrent dans la construction et dans les machines. On pourra appliquer à ces corps naturels tout ce que nous avons dit des solides invariables. Il n'en résultera qu'une erreur extrêmement petite, et, par conséquent, inappréciable.

Lorsque le corps subit un changement de forme sensible pendant la durée du mouvement, on ne peut déterminer les circonstances du mouvement, que si l'on connaît les lois suivant lesquelles varient les actions que les différents points du corps exercent les uns sur les autres. Alors, le problème rentre dans le cas

général du mouvement d'un système de points matériels soumis à des forces extérieures et à leurs actions mutuelles.

Nous venons de dire que le mouvement d'un solide naturel, qui ne subit pas de déformation sensible pendant la durée du mouvement, peut être traité comme s'il s'agissait d'un solide de forme invariable. Mais, la plupart du temps, dans les applications, on a à considérer le mouvement de corps qui se meuvent en touchant d'autres corps mobiles ou immobiles. Ce contact peut avoir lieu de différentes manières. Il peut n'avoir lieu que pendant un temps très court : c'est ce qui arrive quand il se produit un *choc;* ou pendant un temps fini : c'est ce qui arrive quand les solides glissent ou roulent l'un sur l'autre.

310. Proposons-nous actuellement d'étudier le phénomène du *choc de deux corps sphériques.* Considérons donc deux corps sphériques et homogènes, de masses m et m', animés chacun d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, suivant la ligne des centres. Soient v et v' les vitesses de ces corps, vitesses que nous supposons de même sens. Supposons le corps m en arrière de m', et soit $v > v'$; la distance des deux corps va en diminuant, et ils finiront par se rencontrer en produisant un choc. Il est évident que les deux centres resteront en ligne droite pendant le choc, et après le choc. Or, lorsque les deux corps viennent en contact, il se produit des forces qui tendent à diminuer la vitesse de m, et à augmenter la vitesse de m'.

Au bout d'un temps très court, les deux corps auront donc une même vitesse u. Pour déterminer cette vitesse commune u, nous appliquerons le théorème des quantités de mouvement projetées sur un axe. Or, les forces

développées par le choc sont des forces intérieures : il n'y a donc pas de force extérieure appliquée au système. Par conséquent, en vertu d'un théorème connu (n° **183**), la variation de la somme des quantités de mouvement projetées est nulle. Si nous projetons sur la droite qui joint les deux centres, les quantités de mouvement projetées sont égales aux quantités de mouvement elles-mêmes. Or, la somme des quantités de mouvement avant le choc est :

$$mv + m'v' ;$$

la somme des quantités de mouvement lorsque la vitesse est la même pour les deux corps est :

$$mu + m'u = (m + m')\, u ;$$

on a donc :

$$mv + m'v' - (m + m')\, u = 0,$$

d'où :

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

équation qui servira à déterminer la vitesse commune u.

311. Étudions maintenant ce qui se passe à partir de cet instant. Nous aurons deux cas à considérer suivant la nature des corps :

1° Si *les corps sont entièrement dépourvus d'élasticité*, ils ne tendent pas à revenir à leur forme primitive. Ils cesseront d'agir l'un sur l'autre, et ils continueront à se mouvoir avec la même vitesse u, en restant en contact.

2° Si *les corps sont élastiques*, ils tendent à reprendre leur forme primitive. Ils continueront à réagir l'un sur l'autre : la vitesse de m est encore diminuée, et celle de m' est encore augmentée. Au bout d'un certain temps, les corps se séparent avec des vitesses différentes.

Si nous supposons les corps *parfaitement élastiques*, les réactions pendant la deuxième partie du phénomène seront égales aux actions développées pendant la première partie. La vitesse de m diminuera donc de la même quantité $v - u$ que dans la première partie, et la vitesse de m' augmentera de la même quantité $u - v'$ que dans la première partie.

En désignant par w et w' les vitesses de m et m' au moment où ils se séparent, $u - w$ sera la vitesse perdue par m dans la seconde partie, et $w' - u$ la vitesse gagnée par m' dans cette seconde partie; nous aurons donc :

$$u - w = v - u,$$

$$w' - u = u - v'.$$

On en tire :

$$w = \frac{(m - m')\,v + 2m'v'}{m + m'},$$

$$w' = \frac{(m' - m)\,v' + 2mv}{m + m'}.$$

Ces équations serviront à déterminer les vitesses w et w' des deux corps au moment où ils se séparent.

Ainsi donc, dans le cas de *deux corps dépourvus d'élasticité*, la formule :

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'},$$

donnera la vitesse commune aux deux corps après le choc.

C'est la vitesse avec laquelle ces deux corps continueront à se mouvoir en restant en contact.

Dans le cas de *deux corps parfaitement élastiques*, on devra appliquer les deux dernières formules qui nous donneront les vitesses respectives w et w' des deux corps après le choc.

312. Cas particuliers. — 1° Si le corps m' a un rayon infini, et une masse égale à l'infini, et si sa vitesse v' est nulle, ce corps se réduit à *un plan fixe* choqué par un corps sphérique qui se meut perpendiculairement à sa direction. On a alors :

$$u = 0, \quad w = -v.$$

La première formule nous apprend que *si les deux corps sont l'un et l'autre dépourvus d'élasticité, le corps qui rencontre le plan restera immobile sur ce plan.*

La seconde formule nous montre que *si les deux corps sont parfaitement élastiques, le corps qui rencontre le plan quittera ce plan avec une vitesse égale et de sens contraire à celle qu'il possédait au moment du choc.* C'est le cas d'une bille d'ivoire qui tombe normalement sur un plan de marbre.

2° Si les masses m et m' sont égales, et si $v' = 0$, on a :

$$u = \frac{1}{2}v, \quad w = 0, \quad w' = v.$$

Donc, *si les corps sont dépourvus d'élasticité*, la première formule nous montre qu'après le choc, *ils se meuvent ensemble avec une vitesse commune égale à la moitié de la vitesse de m au moment du choc.* Au contraire, ***si les corps sont parfaitement élastiques,*** les deux dernières formules nous apprennent que *le corps m s'arrêtera à la fin du choc, et que le corps m' prendra la vitesse v que possédait le corps m au moment du choc.* C'est ce qui arrive lorsque les deux corps de même masse sont des billes d'ivoire.

313. Proposons-nous de *déterminer la perte de force vive dans le choc.* Considérons donc les valeurs de la force vive avant le choc et après le choc, et appliquons, pour trouver ces deux expressions de la force vive, le théorème de Kœnig (nº **207**) :

$$\Sigma mv^2 = MV^2 + \Sigma mu^2,$$

c'est-à-dire que nous décomposerons la force vive totale en deux parties : l'une, la force vive du système s'il était concentré à son centre de gravité ; l'autre, la force vive relative au centre de gravité.

Mais, le centre de gravité du système est animé pendant toute la durée du choc d'un mouvement rectiligne et uniforme (nº **179**). Il a donc constamment la même vitesse, avant, pendant et après le choc. Cette vitesse constante sera donc égale à u, vitesse commune des deux corps au moment de la plus grande déformation. Le premier terme du second membre de la formule de Koenig a donc la même valeur, et, par conséquent, il disparaîtra dans l'expression de la variation de la force vive totale d'un instant à un autre.

D'autre part, les vitesses relatives au centre de gravité avant le choc sont respectivement $v - u$

et $u - v'$; donc, avant le choc, la force vive du système dans son mouvement relatif au centre de gravité est :

$$m(v-u)^2 + m'(u-v')^2.$$

Cherchons maintenant la force vive relative après le choc.

Si les corps sont parfaitement élastiques, les vitesses relatives au centre de gravité après le choc sont respectivement $u - w$ et $w' - u$; donc, après le choc, la force vive relative aura pour expression :

$$m(u-w)^2 + m'(w'-u)^2.$$

En remplaçant w et w' par leurs valeurs, on trouve pour la force vive relative après le choc :

$$m(v-u)^2 + m'(u-v')^2.$$

La force vive relative après le choc est donc égale à la force vive relative avant le choc. Or, la force vive totale étant égale à la force vive relative augmentée d'un terme constant, il s'ensuit que, *dans le cas des corps parfaitement élastiques, la force vive totale après le choc est égale à la force vive totale avant le choc.*

Au contraire, *si les corps sont dépourvus d'élasticité*, d'après ce que nous avons vu, ils continuent après le choc, à se mouvoir avec la vitesse commune u; la vitesse relative est donc nulle pour chacun des deux corps. Par conséquent, après le choc, la force vive relative est nulle; il s'ensuit que, par l'effet du choc, la force vive totale a diminué de la quantité :

$$m(v-u)^2 + m'(u-v')^2.$$

Or, cette dernière expression est celle de la force vive correspondante aux vitesses perdue et gagnée par les deux corps, lesquelles ont respectivement pour valeurs $v - u$ et $u - v'$, et nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME DE CARNOT. — *Lorsque les corps qui se choquent sont dépourvus d'élasticité, la perte de force vive due au choc est égale à la somme des forces vives dues aux vitesses perdue et gagnée par les deux corps.*

FIN DU TOME DEUXIÈME.

